

Inhalt

Inhalt	i
Abbildungsverzeichnis.....	iii
Tabellenverzeichnis.....	vii
Formelverzeichnis	ix
1 Einleitung.....	1
2 Theoretische Betrachtungen	3
2.1 Die Maxwell-Gleichungen	3
2.2 Die Materialgleichungen.....	5
2.3 Wellengleichungen.....	6
2.4 Lösungen der Wellengleichung.....	9
2.4.1 Lösungen der Helmholtz-Gleichung	9
2.4.2 Lösungen der paraxialen Helmholtz-Gleichung.....	10
2.4.2.1 Der Gaußsche Grundmode.....	10
2.4.2.2 Moden höherer Ordnung	12
2.5 Das Kirchhoff-Fresnelsche Beugungsintegral	16
3 Numerische Realisierung und ausgewählte Programmabschnitte	21
3.1 Numerische Integration und Umsetzung	21
3.2 Berechnungsmöglichkeiten	22
3.2.1 Rotationssymmetrie.....	23
3.2.2 Keine Rotationssymmetrie	29
3.2.3 Zusammenfassung Berechnungsvarianten	33
3.3 Strahlenoptische Abschätzung	35
3.4 Ausgabe der Berechnungsdaten	37
4 Simulationen und Untersuchungen	43
4.1 Variation der Elementgröße	43
4.2 Der Neigungsfaktor.....	53
4.3 Berechnungsdauer	59

4.3.1	Variation der Elementanzahl der Grenzfläche.....	59
4.3.2	Variation der Elementanzahl der Startfläche.....	62
4.3.3	Abschätzung der Berechnungsdauer	65
4.4	Zusammenfassung und Ausblick.....	66
Literatur.....		69
Anlagen.....		71
A	Rechengesetze und Integralsätze	I
B	Integration von Moden höherer Ordnung	III
C	Vergleich Berechnungsdauer	V
D	Programmdokumentation	VII
Eidesstattliche Erklärung		

Abbildungsverzeichnis

Abb. 2-1 Integrationsvolumen mit Ausschluss des Punktes \vec{p}	17
Abb. 2-2 Darstellung der gewählten Oberflächen nach Kirchhoff.....	19
Abb. 2-3 Schematische Darstellung der Start- und Zielfläche sowie den Abstand der Elemente .	20
Abb. 3-1 Schematische Darstellung der Sektorisierung der Matrix X ; blau: Abgrenzung der Sektoren.....	27
Abb. 3-2 Erzeugung der Intensitätsverteilung an einem Gitter; gewählte Größen: Gaußstrahl $w_{86} = 20 \mu m$, $P = 10 W$, Gitterkonstante $g = 5 \mu m$, $T_x = 40\%$, $T_y = 100\%$	32
Abb. 3-3 Oberfläche zur Strahlenoptischen Abschätzung.....	35
Abb. 3-4 Brechung an einer Grenzfläche, $n' > n$	36
Abb. 3-5 Fenster für die Ausgabe der Berechnungsergebnisse.....	37
Abb. 3-6 Schematische Darstellung der Berechnung des Strahlradius mit $1/e^2$, blau: Spline der Umkehrfunktion, orange: Vorgabe des $1/e^2$ ten Anteils der maximalen Intensität und dazugehöriger Funktionswert.....	39
Abb. 3-7 Schematische Darstellung der Ringelemente	39
Abb. 3-8 Darstellung der Abhängigkeit der Einzelleistungen vom Radius gewählte Größen: Gaußstrahl, $w_{86} = 15 \mu m$, $P = 10 W$, $z_1 = 40 mm$, $R_{aperture} = 1,836 mm$	40
Abb. 3-9 Darstellung der aufsummierten Einzelleistungen als Umkehrfunktion gewählte Größen: Gaußstrahl, $w_{86} = 15 \mu m$, $P = 10 W$, $z_1 = 40 mm$, $R_{aperture} = 1,836 mm$	41
Abb. 4-1 Grafische Darstellung der ermittelten relativen Abweichungen des Strahlradius vom theoretischen Wert in Abhängigkeit von der Elementgröße.....	44
Abb. 4-2 Darstellung der erhaltenen Strahlprofile; links: regulärer Gaußstrahl; Mitte: Gaußstrahl mit kleinen Nebenmaxima; rechts: Gaußstrahl mit großen Nebenmaxima.....	45
Abb. 4-3 Darstellung der Abhängigkeit der Lage des 1. Nebenmaximums von der Elementgröße	46

Abb. 4-4 Darstellung der erhaltenen Intensitätsverteilung für verschiedene Tailenradien (a) $w_{86} = 500 \mu m$; (b) $w_{86} = 1 mm$; (c) $w_{86} = 2 mm$; Elementgröße 10λ	46
Abb. 4-5 Darstellung der erhaltenen Intensitätsverteilung für links: Ebene; rechts: Kugel; $w_{86} = 30 \mu m$; Elementgröße 15λ	47
Abb. 4-6 Zweidimensionale Darstellung der Projektion einer ebenen Fläche auf eine Kugeloberfläche, l_1 -tatsächliche Elementgröße, l_2 -projizierte Elementgröße, $l_2 > l_1$	48
Abb. 4-7 Darstellung der Abhängigkeit der maximalen Elementgröße vom Strahlradius für verschiedene Entfernungen der Zielfläche	49
Abb. 4-8 Darstellung der Abhängigkeit der maximalen Elementgröße vom reziproken Strahlradius bei verschiedenen Entfernungen der Zielfläche	50
Abb. 4-9 Darstellung der Abhängigkeit der maximalen Elementgröße vom Abstand von Start- und Zielfläche.....	50
Abb. 4-10 Darstellung der Abhängigkeit der maximalen Elementgröße der Abstrahlfläche in Abhängigkeit von der Elementgröße der Zielfläche für zwei verschiedene Strahlabmessungen...	52
Abb. 4-11 Darstellung der Abhängigkeit der relativen Abweichung zwischen berechneten und theoretischen Strahlradius in Abhängigkeit von der Elementgröße der Zielfläche für zwei verschiedene Strahlabmessungen	53
Abb. 4-12 Darstellung der Abhängigkeit der relativen Abweichung (blau) von x ; zum Vergleich der Verlauf der elektrischen Feldstärke (rot); gewählte Größen: $w_{86} = 200 \mu m$, $z_1 = 800 \mu m$, Elementgröße 1λ	55
Abb. 4-13 Darstellung der Abhängigkeit der relativen Abweichung (blau) von x ; zum Vergleich der Verlauf der elektrischen Feldstärke (rot); gewählte Größen: $w_{86} = 200 \mu m$, $z_1 = 50 \mu m$, Elementgröße 1λ	56
Abb. 4-14 Darstellung der Abhängigkeit der relativen Abweichung (blau) von x ; zum Vergleich der Verlauf der elektrischen Feldstärke (rot); gewählte Größen: $w_{86} = 200 \mu m$, $z_1 = 50 \mu m$, Elementgröße $0,5\lambda$	56
Abb. 4-15 Darstellung der Abhängigkeit der relativen Abweichung (blau) von x für eine sphärisch gekrümmte Oberfläche; zum Vergleich der Verlauf der elektrischen Feldstärke (rot) ..	58
Abb. 4-16 Darstellung der Abhängigkeit der Berechnungszeit \bar{t} von der Elementanzahl der Grenzfläche für die Rotationssymmetrie: Abstrahlgeometrie Linie.....	59

Abb. 4-17 Darstellung der Abhängigkeit der Berechnungszeit \bar{t} von der Elementanzahl der Grenzfläche für die Rotationssymmetrie: Abstrahlgeometrie Fläche	60
Abb. 4-18 Darstellung der Abhängigkeit der Berechnungszeit \bar{t} von der Elementanzahl der Grenzfläche für die keine Rotationssymmetrie	61
Abb. 4-19 Darstellung der Abhängigkeit der Berechnungszeit \bar{t} von der Elementanzahl der Startfläche (501 ² Elemente) für die Rotationssymmetrie: Abstrahlgeometrie Fläche im Vergleich: mit und ohne Sektorisierung	62
Abb. 4-20 Darstellung der Abhängigkeit der Berechnungszeit \bar{t} von der Elementanzahl der Startfläche für die Rotationssymmetrie: Abstrahlgeometrie Linie.....	62
Abb. 4-21 Darstellung der Abhängigkeit der Berechnungszeit \bar{t} von der Elementanzahl der Startfläche für die Rotationssymmetrie: Abstrahlgeometrie Linie in einem ausgewählten Bereich	63
Abb. 4-22 Darstellung der Abhängigkeit der Berechnungszeit \bar{t} von der Elementanzahl der Startfläche für die Rotationssymmetrie: Abstrahlgeometrie Fläche	64
Abb. 4-23 Darstellung der Abhängigkeit der Berechnungszeit \bar{t} von der Elementanzahl der Startfläche für die keine Rotationssymmetrie	64
 Abb i Programmoberfläche.....	XII
Abb ii Eingabemöglichkeiten für Grenzflächen	XVI
Abb iii Strahlenoptische Abschätzung.....	XVII
Abb iv Schematische Darstellung der Gebiete, die zur Erstellung eines Top-Hat Profils benötigt werden.....	XIX
Abb v Schematische Darstellung des zu berechnenden optischen Systems	XXXI
Abb vi Dreidimensionale Vorschau des optischen Systems.....	XXXII
Abb vii Verlauf der elektrischen Feldstärke in der xz-Ebene.....	XXXIII
Abb viii 3D Strahlenverlauf des optischen Systems.....	XXXV

Abb ix 3D Darstellung der elektrischen Feldstärke auf der Zielfläche nach Beugung an einer Kreisblende.....	XXXVI
Abb x 2D Darstellung der Intensität auf der Zielfläche nach Beugung an einer Kreisblende	XXXVI
Abb xi normierte Darstellung des Verlaufes der elektrischen Feldstärke in der xz-Ebene nach Beugung am Einzelspalt.....	XXXVII
Abb xii 2D Darstellung der Intensität auf der Zielfläche nach Beugung am Einzelspalt	XXXVII
Abb xiii 3D Darstellung der elektrischen Feldstärke auf der Zielfläche nach Beugung am Amplitudengitter	XXXVIII

Tabellenverzeichnis

Tab. 3-1 Mögliche Intensitätsverteilung der Rotationssymmetrie; enthaltene Leistung 10 W	23
Tab. 3-2 Mögliche Oberflächenformen; Darstellung: Begrenzung als Kreis mit $R_{aperture} = 25 \mu m$, $z_i = 0$	24
Tab. 3-3 Darstellung der Gauß-Hermite-Moden; $w_{\sigma x} = w_{\sigma y} = 20 \mu m$, $P = 10 W$	30
Tab. 3-4 Darstellung der Gauß-Laguerre-Moden; $w_{\sigma} = 20 \mu m$, $P = 10 W$	30
Tab. 3-5 Schematische Darstellung der verwendeten Geometrie, orange: genutzte Geometrie, blau: ungenutzte Geometrie	34
Tab. 4-1 Parameter zur Untersuchung des Einflusses der Elementgröße auf der Abstrahlfläche	43
Tab. 4-2 Parameter zur Untersuchung des Einflusses der Elementgröße auf der Abstrahlfläche auf die Lage des 1. Nebenmaximums	45
Tab. 4-3 Parameter zur Untersuchung der maximalen Elementgröße für eine vorgegebene Ausdehnung	48
Tab. 4-4 Parameter zur Untersuchung des Einflusses der Elementgröße auf der Zielfläche auf das Berechnungsergebnis	51
Tab. 4-5 Parameter zur Untersuchung des Einflusses des Neigungsfaktors	54
Tab. 4-6 Erhaltene Strahlprofile im Fernfeld mit und ohne Neigungsfaktor für Ebene und Sphäre; $w_{86} = 30 \mu m$; Elementgröße 15λ	57
Tab. 4-7 Parameter zur Untersuchung des Einflusses des Neigungsfaktors für eine sphärisch gekrümmte Oberfläche	58
Tab. 4-8 Erhaltene normierte Berechnungszeiten	65
Tab i Vergleich der berechneten Berechnungsdauern mit den tatsächlich benötigten Berechnungsdauern	V
Tab ii Übersicht der Eingabemöglichkeiten der Laser-Parameter für Rotationssymmetrie	XIII

Tab iii Übersicht der Eingabemöglichkeiten der Laser-Parameter für keine Rotationssymmetrie	XIV
Tab iv Übersicht der Eingabemöglichkeiten der Parameter der Startfläche für Rotationssymmetrie.....	XIV
Tab v Übersicht der Eingabemöglichkeiten der Parameter der Startfläche für keine Rotationssymmetrie.....	XV
Tab vi Vergleich der erzeugten Intensitäten und Phasenlage bei Gauß-Laguerre-Moden mit $\cos(l \cdot \varphi)$ und $e^{i \cdot l \cdot \varphi}$; gewählte Größen: $l = 2, p = 2, w_\sigma = 50 \mu m, P = 10 W$	XXII
Tab vii Übersicht der verwendeten Parameter.....	XXXII
Tab viii Übersicht Anzeigemöglichkeiten im Auswertungsfenster	XXXIV
Tab ix Verwendete Parameter für Beugung an einer Kreisblende	XXXVI
Tab x Verwendete Parameter für Beugung am Einzelspalt.....	XXXVII
Tab xi Verwendete Parameter für Beugung am Amplitudengitter	XXXVIII

Formelverzeichnis

Formelzeichen	Bedeutung	Maßeinheit
\vec{A}	Oberflächennormale	m^2
\vec{A}'	Oberflächennormale des Kugelelementes	m^2
A	Hilfsmatrix zur Erzeugung des Strahlprofils	—
A_0	Startfläche	m^2
A_1	Zielfläche	m^2
a_i	Radialer Parameter für parabolische, hyperbolische oder elliptische Flächen	—
A_m, A_n	Ansätze für Lösungen der Form (2-36)	—
\underline{A}_m	Komplexe Amplitude von A_m	—
A_{Ob}	Oberflächeninhalt des Gesamtvolumens	m^2
A'_{Ob}	Oberflächeninhalt des Kugelelementes	m^2
\vec{B}	Magnetische Flussdichte	T
B	Hilfsmatrix zur Erzeugung des Strahlprofils	—
c_i	Axialer Parameter für hyperbolische oder elliptische Flächen i: Index der jeweiligen Fläche	—
\vec{D}	Elektrische Flussdichte	$\frac{C}{m^2}$
\vec{E}_0, E_0	Amplitude der elektrischen Feldstärke	$\frac{V}{m}$
$E_{0,mn}$	Amplitude der elektrischen Feldstärke abhängig von den Indizes m und n	$\frac{V}{m}$
E_1	Elektrische Feldstärke auf der Zielfläche	$\frac{V}{m}$
\vec{E}, E	Elektrische Feldstärke	$\frac{V}{m}$
\underline{E}	Komplexe Amplitude der elektrischen Feldstärke	$\frac{V}{m}$
E^*	Konjugiert komplexe elektrische Feldstärke	$\frac{V}{m}$

E_{mit}	Elektrische Feldstärke auf der Zielfläche mit Neigungsfaktor berechnet	$\frac{V}{m}$
E_{rot}	Elektrische Feldstärke auf der Zielfläche ohne Neigungsfaktor berechnet	$\frac{V}{m}$
E_{S0}	Elektrische Feldstärke auf der Startfläche	$\frac{V}{m}$
ΔE_{rel}	Relative Abweichung zwischen elektrischer Feldstärke mit und ohne Neigungsfaktor	—
\vec{e}_r	Radialer Einheitsvektor	m
f	Normierungsfaktor bzgl. der Orthogonalitätsrelation der hermiteschen bzw. laguerreschen Polynome	—
g	Gitterkonstante	m
$G(r)$	Mathematische Hilfsfunktion	$\frac{1}{m}$
\vec{H}	Magnetische Feldstärke	$\frac{A}{m}$
$h(x)$	Hilfsfunktion zur Lösung von (2-38)	—
$H(x)$	Hermiteische Polynome	—
$H_x(y)$	Hermiteische Polynome zur Erzeugung der Feldstärkeverteilung in x-Richtung	—
$H_y(x)$	Hermiteische Polynome zur Erzeugung der Feldstärkeverteilung in y-Richtung	—
i	Imaginäre Einheit	—
I	Intensität	$\frac{W}{m^2}$
I_0	Amplitude der Intensitätsverteilung	$\frac{W}{m^2}$
I_{rel}	Relative Intensität	$\frac{W}{m^2}$
\vec{j}	Leistungsstromdichte	$\frac{A}{m^2}$
\vec{j}	Magnetische Polarisation	T
\vec{j}_Q	Quellstromdichte	$\frac{V}{m^3}$
k	Kreiswellenzahl	$\frac{1}{m}$
\vec{k}	Wellenvektor / Wellennormale	$\frac{1}{m}$
K	Volumen eines Kugelelements	m^3

l_1, l_2	Elementgrößen	m
$L(x)$	Laguerre-Polynome	—
l, p	Indizes der Ordnung der Mode für Gauß-Laguerre-Moden	—
m, n	Indizes der Ordnung der Mode für Gauß-Hermite-Moden	—
m_S	Anstieg der Geradengleichung des einfallenden Strahles	—
m'_S	Anstieg der Geradengleichung des gebrochenen Strahles	—
n_s	Brechzahl; s: Index des Mediums	—
ny	Elementanzahl in y-Richtung	—
n_y	Absolutes Glied der Geradengleichung des einfallenden Strahls	—
ny	Elementanzahl in y-Richtung	—
n'_y	Absolutes Glied der Geradengleichung des einfallenden Strahls	—
nx	Elementanzahl in x-Richtung	—
\vec{n}	Normalenvektor	—
\vec{n}_0	Normierter Normalenvektor	—
N	Neigungsfaktor	—
\vec{p}	Elektrische Polarisierung	$\frac{C}{m^2}$
$P_1(x_1, y_1, z_1)$	Punkt auf der Zielfläche	—
$p(z)$	Normierungsparameter zur Bildung der hermiteschen Polynome	m
\vec{p}	Beliebiger Punkt in \mathbb{R}^3 ; $\vec{p} = (x_p, y_p, z_p)^T$	—
P	Leistung	W
q	Komplexer Strahlparameter	$m + i \cdot m$
r	Radiale Koordinate $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	m
\vec{r}	Verbindungsvektor zweier Punkte	m
\vec{r}_N	Richtungsvektor der Normalen	m

\vec{r}_S	Richtungsvektor des einfallenden Strahls	m
\vec{r}'_S	Richtungsvektor des gebrochenen Strahls	m
\vec{r}_T	Richtungsvektor der Tangente	m
r_x	Radiusanteil in x-Richtung	m
r_y	Radiusanteil in y-Richtung	m
$R(z)$	Krümmungsradius der Wellenfront	m
$R_{aperture}$	Radius der Begrenzung (Kreis)	m
R_i	Krümmungsradius der i-ten Fläche	m
R_x	Radiusanteil in x-Richtung	m^3
R_y	Radiusanteil in y-Richtung	m
\vec{s}	Strecke	m
s	Zählindex	—
s_λ	Elementgröße der Abstrahlfläche normiert auf die Wellenlänge	—
$s_{\lambda Ziel}$	Elementgröße der Zielfläche normiert auf die Wellenlänge	—
t	Zeit	s
\bar{t}	Mittlere Berechnungsdauer	—
t_{norm}	Normierte Berechnungsdauer	s
T_x	Transmission durch das Amplitudengitter in x-Richtung	%
T_y	Transmission durch das Amplitudengitter in y-Richtung	%
u	Zählindex	—
v	Zählindex	—
V	Volumen	m^3
w	Strahlradius	m
w_0	Tailenradius des Grundmodes	m

$w_{0,mn}$	Tailienradius abhängig von den Indizes m und n	m
$w_{0x,m}$	Tailienradius in x-Richtung abhängig vom Index m	m
$w_{0y,n}$	Tailienradius in y-Richtung abhängig vom Index n	m
$w_{x,m}$	Strahlradius in x-Richtung abhängig vom Index m	m
$w_{y,n}$	Strahlradius in y-Richtung abhängig vom Index n	m
w_{pl}	Strahlradius abhängig von den Indizes l und p	m
w_{86}	Strahlradius auf der Basis von 86,5% Leistungseinschluss	m
w_{ber}	mithilfe des Programmes berechneter Strahlradius	m
w_{theo}	Theoretischer Strahlradius	m
x, y, z	Kartesische Koordinaten	m
x_0, y_0, z_0	Kartesische Koordinaten der Startfläche	m
x_{0s}	Elementgröße in x-Richtung	m
y_{0s}	Elementgröße in y-Richtung	m
x_1, y_1, z_1	Kartesische Koordinaten der Zielfläche	m
x_{1MN}	Position des 1. Nebenmaximums	m
x_i, y_i, z_i	Kartesische Koordinaten der i-ten Fläche	m
X_i, Y_i, Z_i	Matrix, welche alle x-, y- oder z-Koordinaten einer Fläche enthält	m
x_{Laser}	x-Koordinate des Mittelpunktes der Strahlquelle	m
y_{Laser}	y-Koordinate des Mittelpunktes der Strahlquelle	m
$x_{MitteBegr}$	x-Koordinate des Mittelpunktes der Begrenzung	m
$y_{MitteBegr}$	y-Koordinate des Mittelpunktes der Begrenzung	m
y_O	Oberflächenfunktion der Grenzflächen	m
y_{SP}	y-Koordinate des Schnittpunktes von Strahl und Grenzfläche	m
z_{SP}	z-Koordinate des Schnittpunktes von Strahl und Grenzfläche	m

z_R	Rayleighlänge	m
Z_W	Wellenimpedanz	Ω
α	Vertikaler Drehwinkel	$rad, ^\circ$
α_i	Öffnungswinkel des Kegels, i: Index der jeweiligen Fläche	$rad, ^\circ$
β	Horizontaler Drehwinkel	$rad, ^\circ$
δ_{pl}	Kronecker-Delta	—
ε_0	Elektrische Feldkonstante	$\frac{As}{Vm}$
ε	Permittivität	$\frac{As}{Vm}$
ε_r	Relative Permittivität	—
ϑ	Polarwinkel	$rad, ^\circ$
λ	Wellenlänge	m
μ_0	Magnetische Feldkonstante	$\frac{Vs}{Am}$
μ	Permeabilität	$\frac{Vs}{Am}$
ξ	Gouy-Phase	$rad, ^\circ$
ρ	Elektrische Ladungsdichte	$\frac{C}{m^3}$
σ_x^2	2. Moment der Intensitätsverteilung in x-Richtung	m^2
φ	Azimutwinkel	$rad, ^\circ$
ω	Kreisfrequenz	$\frac{1}{s}$
Ω	Raumwinkel	sr

Quellcodeauszüge:

1 i	Imaginäre Einheit	—
A0	Flächeninhalt eines Elementes der Startfläche	m^2

alpha	Cosinus des Winkels zwischen Normalenvektor der Startfläche und Kreiswellenvektor	—
abstand	Matrix, die den Abstand aller Koordinaten auf der Startfläche zum Zielelement enthält	m
beta	Cosinus des Winkels zwischen Normalenvektor der Startfläche und \vec{r}	—
E0	Matrix, welche die elektrischen Feldstärkewerte eines jeden Elementes der Startfläche enthält	$\frac{V}{m}$
Eele	Matrix, die den Anteil aller von der Startfläche ausgesendeten Elementarwellen für das Zielelement enthält	$\frac{V}{m}$
Eges	Elektrische Feldstärke auf der Zielfläche	$\frac{V}{m}$
EgesImag	Imaginärteil der elektrischen Feldstärke auf der Ziellinie	$\frac{V}{m}$
EgesReal	Realteil der elektrischen Feldstärke auf der Ziellinie	$\frac{V}{m}$
ESplineImag	Splinefunktion des Imaginärteiles der elektrischen Feldstärke auf der Ziellinie	$\frac{V}{m}$
ESplineReal	Splinefunktion des Realteiles der elektrischen Feldstärke auf der Ziellinie	$\frac{V}{m}$
EImag	Imaginärteil der elektrischen Feldstärke auf der Zielfläche	$\frac{V}{m}$
EReal	Realteil der elektrischen Feldstärke auf der Zielfläche	$\frac{V}{m}$
nindex	Brechungsindex zwischen Start- und Zielfläche	—
nx1	Elementanzahl in x-Richtung auf der Zielfläche	—
r	Matrix, welche die radialen Koordinaten der Zielfläche enthält	m
r1	Zeilenvektor, welcher die radialen Koordinaten der Ziellinie enthält	m
X0, Y0, Z0	Matrix, die alle x-,y- bzw. z-Koordinaten der Startfläche enthält	m
x1, z1	Zeilenvektor mit den x- bzw. z-Koordinaten der Zielfläche	m
x1l	Größte x-Koordinate	m
x1s	Elementgröße in x-Richtung	m

1 Einleitung

„Die Schlüsse, durch welche man, hauptsächlich gestützt auf Betrachtungen von Huygens und Fresnel, die Bildung der Lichtstrahlen, ihre Reflexion und Brechung, sowie die Beugungserscheinungen zu erklären pflegt, entbehren in mehrfacher Beziehung der Strenge. Eine vollkommen befriedigende Theorie dieser Gegenstände aus den Hypothesen der Undulationstheorie zu entwickeln, scheint auch heute noch nicht möglich zu sein; doch lässt sich jenen Schlüssen eine grössere Schärfe geben.“ [Kirch1882]. Mit diesen Worten begann Gustav Kirchhoff seine Ausführungen in: „Zur Theorie der Lichtstrahlen“ im Jahre 1882. Kirchhoff versuchte die vorhandenen Prinzipien in eine mathematisch fassbare Form zu bringen. An ihnen wurde teils harte Kritik geübt. Für viele Physiker, wie z. B. Arnold Sommerfeld, dienten sie jedoch als Ansatz für weitere Betrachtungen und wurden erweitert.

In der modernen Lasertechnik ist es für Anwender wichtig zu wissen, welche Eigenschaften der Laserstrahl nach dem Durchlaufen der optischen Komponenten der Laseranlage, wie z. B. Kollimator, aufweist. Manuelle Berechnungen zu dieser Problematik stellen sich zeitaufwendig und kompliziert dar. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde ein Programm realisiert, das die Beschreibung von elektromagnetischer Strahlung in einem optischen System durch numerische Berechnungsmethoden ermöglicht. Die numerische Berechnung der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen hat durch die moderne Rechentechnik einen großen Aufschwung bekommen. Durch immer steigende Rechenleistungen und vorhandene Rechenkapazitäten ist es möglich die Berechnungen immer komplexer zu gestalten und sie der Realität anzunähern. Trotz dieser Fortschritte unterliegen Simulation Vereinfachungen, durch die sich die Anzahl der einfließenden Parameter stark verringert. Als Beispiel seien an dieser Stelle die Annahme, dass die Brechzahl des zu durchdringenden Mediums als homogen angenommen wird sowie eine ideale Oberfläche der Grenzflächen, genannt. Auch mit diesen Idealisierungen würde eine umfassende Berechnung eines komplexen optischen Systems mit Ausdehnungen des Laserstrahls von einigen Millimetern mehrere Jahre dauern. Da diese Berechnungszeiten inakzeptabel sind, wurden weitere Vereinfachungen getroffen und andere Berechnungsmethoden entwickelt die im Folgenden erklärt und dargelegt werden.

Im Theorieteil der Arbeit werden Kirchhoffs Überlegungen kurz dargelegt und eine Möglichkeit zur Herleitung des nach ihm und Fresnel benannten Beugungsintegrals aufgezeigt. Weiterhin werden die im entwickelten Programm zur Verfügung stehenden Strahlprofile ausgehend von den Maxwell-Gleichungen hergeleitet. Im Hinblick auf die Durchführbarkeit von Simulationen

werden Untersuchungen in Bezug auf die Elementgröße und die Rechenzeit angeführt.
Zusätzliche Einflüsse, wie der des sogenannten Neigungsfaktors, wurden untersucht.

2 Theoretische Betrachtungen

In diesem Kapitel werden die Berechnungsgrundlagen der im Programm zur Verfügung stehenden Verteilungen sowie die Grundzüge des Kirchhoff-Fresnelschen Beugungsintegrals hergeleitet. Den Ursprung der wellenoptischen Betrachtungen bilden die Maxwell Gleichungen. Daher wird ihnen ein eigenes Unterkapitel zugedacht. Ausgehend von den Maxwell Gleichungen ergeben sich verschiedene Formen der Wellengleichung, z.B. die Helmholtz-Gleichung und die paraxiale Helmholtz-Gleichung. Zur Lösungsmenge der paraxialen Helmholtz-Gleichung gehören die Gauß-Hermite-Moden sowie die Gauß-Laguerre-Moden. Die Helmholtz-Gleichung bildet den Grundansatz für das Kirchhoff-Fresnelsche Beugungsintegral.

2.1 Die Maxwell-Gleichungen

Die Grundgesetze der Elektrizität und des Magnetismus lassen sich im stationären Fall in vier Differenzialgleichungen zusammenfassen [Jack1999]:

$$\text{Gaußsches Gesetz} \qquad \operatorname{div} \vec{D} = \rho \qquad (2-1)$$

$$\begin{array}{l} \text{Gaußsches Gesetz für} \\ \text{Magnetfelder} \end{array} \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad (2-2)$$

$$\begin{array}{l} \text{Faradaysches} \\ \text{Induktionsgesetz} \end{array} \qquad \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad (2-3)$$

$$\begin{array}{l} \text{Ampèresches} \\ \text{Durchflutungsgesetz} \end{array} \qquad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} \qquad (2-4)$$

James Clerk Maxwell erkannte 1865, dass das Ampèresche Durchflutungsgesetz in der bisherigen Form nur im stationären Fall, wenn $\operatorname{div} \vec{j} = 0$, gilt. Handelt es sich hingegen um zeitabhängige Felder, so muss die Kontinuitätsgleichung (2-5) erfüllt sein:

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (2-5)$$

Maxwell erkannte, dass sich durch Einsetzen von (2-1) in (2-5) eine Gleichung mit verschwindender Divergenz ergibt:

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2-6)$$

Der Ausdruck in der Klammer kann als Ergänzung für (2-4) herangezogen werden. Daraus resultiert das Ampèresche Durchflutungsgesetz für den nichtstationären Fall:

$$\begin{array}{l} \text{Erweitertes} \\ \text{Ampèresches} \\ \text{Durchflutungsgesetz} \end{array} \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2-7)$$

(2-7) erfüllt nach Rechengesetzen der Vektoranalysis (i) eindeutig die Kontinuitätsgleichung.

Den zusätzlichen Term $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ nannte Maxwell Verschiebungsstrom.

Damit stehen nun alle vier Maxwell-Gleichungen in differenzieller Form zur Verfügung:

$$\text{Gaußsches Gesetz} \quad \operatorname{div} \vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2-1)$$

$$\begin{array}{l} \text{Gaußsches Gesetz für} \\ \text{Magnetfelder} \end{array} \quad \operatorname{div} \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2-2)$$

$$\begin{array}{l} \text{Faradaysches} \\ \text{Induktionsgesetz} \end{array} \quad \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (2-3)$$

$$\begin{array}{l} \text{Erweitertes} \\ \text{Ampèresches} \\ \text{Durchflutungsgesetz} \end{array} \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2-7)$$

Mithilfe der Integralsätze von Gauß (**v**) bzw. von Stokes (**vi**) lassen sich die Maxwell-Gleichungen in die anschaulichere Integralform umwandeln:

$$\text{Gaußsches Gesetz} \quad \oiint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho \, dV \quad (2-8)$$

$$\text{Gaußsches Gesetz für Magnetfelder} \quad \oiint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (2-9)$$

$$\text{Faradaysches Induktionsgesetz} \quad \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \frac{d}{dt} \left(\iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \right) = 0 \quad (2-10)$$

$$\text{Erweitertes Ampèresches Durchflutungsgesetz} \quad \oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} + \frac{d}{dt} \left(\iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} \right) \quad (2-11)$$

Diese Gleichungen zogen zur damaligen Zeit eine große Aufmerksamkeit auf sich, da sie neue physikalische Erscheinungen, wie die elektromagnetische Welle, voraussagten. Solche Erscheinungen waren zur damaligen Zeit noch unbekannt. Erst mehr als 20 Jahre später, im Jahre 1886, gelang Heinrich Hertz der Nachweis der Existenz elektromagnetischer Wellen, mithilfe des sogenannten Hertzschen Oszillators.

2.2 Die Materialgleichungen

Die Materialgleichungen (2-12) und (2-13) stellen makroskopische Mittelwerte dar und beschreiben das Verhalten elektromagnetischer Strahlung in einem Medium. Da ihre komplette Ausführung und Erläuterung für die weiteren Betrachtungen nicht notwendig ist, sei an dieser Stelle auf die Arbeiten von Born [Born] und Jackson [Jack1999] verwiesen.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}(\vec{E}) = \epsilon \vec{E} \quad (2-12)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}(\vec{H}) = \mu \vec{H} \quad (2-13)$$

Die elektrische -, sowie die magnetische Polarisierung sind im Allgemeinen nichtlinear und anisotrop.

2.3 Wellengleichungen

Ausgangspunkt sei die Gleichung (2-3). Durch nochmaliges Anwenden der Rotationsoperation ergibt sich folgende Gleichung:

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\text{rot } \dot{\vec{B}}$$

Mithilfe der Materialgleichung (2-13) folgt:

$$-\text{rot } \dot{\vec{B}} = -\text{rot } (\mu_0 \dot{\vec{H}} + \dot{\vec{J}}) = -\text{rot } \mu_0 \dot{\vec{H}} - \text{rot } \dot{\vec{J}}$$

Mit Maxwell-Gleichung (2-7) und $\mu_0 = \text{const.}$ (Verwendung Rechenregel (iii)) gilt:

$$-\text{rot } \dot{\vec{B}} = -\mu_0 (\dot{\vec{J}} + \ddot{\vec{D}}) - \text{rot } \dot{\vec{J}} = -\mu_0 \dot{\vec{J}} - \mu_0 \ddot{\vec{D}} - \text{rot } \dot{\vec{J}}$$

Wird die Materialgleichung (2-12) in diese Vorschrift eingesetzt, folgt:

$$-\text{rot } \dot{\vec{B}} = -\mu_0 \dot{\vec{J}} - \mu_0 \varepsilon_0 \ddot{\vec{E}} - \mu_0 \ddot{\vec{P}} - \text{rot } \dot{\vec{J}}$$

Durch Einsetzen dieses Ausdruckes in die Ausgangsgleichung, nimmt diese folgende Form an:

$$\text{rot rot } \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \ddot{\vec{E}} = -\mu_0 (\dot{\vec{J}} - \ddot{\vec{P}}) - \text{rot } \dot{\vec{J}}$$

Durch Ausnutzung der Identität von Rechenregel (ii) und Zusammenfassung der rechten Seite zur Quellenstromdichte \vec{J}_Q wird die allgemeine Wellengleichung gebildet:

$$\begin{array}{ll} \text{Allgemeine} & \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \ddot{\vec{E}} = \vec{J}_Q \\ \text{Wellengleichung} & \end{array} \quad (2-14)$$

Für (2-14) werden zur weiteren Betrachtung Vereinfachungen getroffen. Zunächst wird festgelegt, dass das Feld quellenfrei ist, d.h. $\vec{J}_Q = 0$ bzw. $\rho = 0$, $|\vec{J}| = 0$ und $|\vec{P}| = 0$. Weiterhin wird das Gaußsche Gesetz (2-1) unter diesen Bedingungen mit der Materialgleichung (2-12) kombiniert, wodurch sich folgende Darstellungsform ergibt:

$$\text{div } \vec{D} = \text{div}(\varepsilon \vec{E}) = \rho = 0$$

Unter der Annahme, dass es sich um ein homogenes isotropes Medium handelt, gilt:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \text{const}$$

Dies bedeutet die Permittivität ε ist ein konstanter skalarer Wert. Aufgrund dieser Eigenschaft lässt sich Rechenregel (iv) ausnutzen:

$$\text{div } \vec{D} = \varepsilon \text{ div } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (2-15)$$

Weiterhin ist bekannt, dass die elektrische bzw. die magnetische Feldstärke eine harmonische Zeitabhängigkeit besitzt, welche durch folgende Beziehung beschrieben werden kann:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{i\omega t}$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r}) \cdot e^{i\omega t}$$

(2-16)

$$\dot{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \cdot i\omega e^{i\omega t}$$

$$\ddot{\vec{E}}(\vec{r}, t) = -\vec{E}(\vec{r}) \cdot \omega^2 e^{i\omega t}$$

Anzumerken ist hier, dass dabei nur der Realteil physikalische Bedeutung hat.

Werden nun die Vereinfachungen ($\vec{J}_Q = 0$), sowie (2-15) und (2-16) in Gleichung (2-14) eingesetzt, so nimmt die allgemeine Wellengleichung die nachfolgende Gestalt an und wird als zeitunabhängige Wellengleichung bezeichnet.

*Zeitunabhängige
Wellengleichung*

$$\Delta \vec{E} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E} = 0 \quad (2-17)$$

Mit der Dispersionsrelation

$$\omega = \frac{k}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \quad (2-18)$$

ergibt sich die sogenannte Helmholtz-Gleichung.

Helmholtz-Gleichung

$$(\Delta + k^2) \vec{E} = 0 \quad (2-19)$$

Für das weitere Vorgehen wird der Laplace-Operator für kartesische Koordinaten zunächst in den transversalen Anteil Δ_T und den longitudinalen Anteil $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ aufgeteilt, damit diese separat betrachtet werden können:

$$\left(\Delta_T + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \vec{E} = 0 \quad \text{mit} \quad \Delta_T = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Als Lösungsansatz wird die folgende Beziehung gewählt [Kuka2009]:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) e^{ikz}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial z} \vec{E}_0(\vec{r}) e^{ikz} + ik \vec{E}_0(\vec{r}) e^{ikz} \right) \quad (2-20)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{E}_0(\vec{r}) e^{ikz} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \vec{E}_0(\vec{r}) e^{ikz} - k^2 \vec{E}_0(\vec{r}) e^{ikz}$$

Unter der Bedingung, dass sich die Amplitude nur wenig in longitudinaler Richtung ändert, aber dafür stark in transversaler Richtung abfällt, gilt:

*Longitudinale
Änderung*

$$\frac{\partial}{\partial z} \vec{E}_0(\vec{r}) \gg \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{E}_0(\vec{r})$$

*Transversale
Änderung*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{E}_0(\vec{r}) &\gg \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{E}_0(\vec{r}) \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \vec{E}_0(\vec{r}) &\gg \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{E}_0(\vec{r}) \end{aligned}$$

Demnach kann der Term $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{E}_0(\vec{r})$ vernachlässigt werden. Wird nun der Lösungsansatz (2-20) in (2-19) eingesetzt, ergibt sich als Ergebnis die paraxiale Helmholtz-Gleichung:

*Paraxiale
Helmholtz-Gleichung*

$$\left(\Delta_T + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{E}_0(\vec{r}) = 0 \quad (2-21)$$

2.4 Lösungen der Wellengleichung

In diesem Kapitel werden die Lösungen der jeweiligen Wellengleichungen dargelegt ohne dabei explizit die Lösungswege zur Lösung der Differenzialgleichungen darzulegen. Wichtige Lösungen, wie Gaußstrahl, Gauß-Hermite-Moden und Gauß-Laguerre-Moden werden genauer behandelt. Weiterhin wird in den nachfolgenden Betrachtungen der Vektorcharakter von elektrischer und magnetischer Feldstärke vernachlässigt und diese als skalare Felder angenommen.

2.4.1 Lösungen der Helmholtz-Gleichung

Die Helmholtz-Gleichung (2-19) in kartesischen Koordinaten, mit dem dazugehörigen Laplace-Operator für kartesische Koordinaten (**vi**), besitzt als charakteristische Lösung die ebene Welle [Graf2009], [Mesch2008].

$$\begin{array}{ll} \text{Ebene transversale} & E(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ \text{Welle} & \end{array} \quad (2-22)$$

Eine weitere Lösung der Helmholtz-Gleichung, jedoch in Kugelkoordinaten, ist die Kugelwelle. Aufgrund des Vektorcharakters elektromagnetischer Wellen, müsste der Laplace-Operator für einen Vektor angewandt [Mesch2008] und somit auch Lösungen für Vektor-Kugelwellen gefunden werden. Jedoch kann für einen kleinen Raumwinkel die skalare Lösung mithilfe des skalaren Laplace-Operators in Kugelkoordinaten (**ix**), verwendet werden [Graf2009].

$$\begin{array}{ll} \text{Isotrope skalare} & E(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{|\vec{r}|} e^{i(\omega t \pm k|\vec{r}|)} \\ \text{Kugelwelle} & \end{array} \quad (2-23)$$

\vec{k} zeigt bei dieser Lösung in jedem Punkt radial nach außen. Der Betrag ist konstant. Daher gilt:

$$k|\vec{r}| = \vec{k} \cdot \vec{r}$$

Für $|\vec{r}| = 0$ wäre diese Gleichung keine Lösung. Dieser Punkt wird deshalb als Ursprung der Welle definiert [Graf2009] und von der Lösung ausgeschlossen. Das positive Vorzeichen bedeutet, dass es sich um eine einfallende Kugelwelle handelt, bei negativem Vorzeichen entsprechend um eine Auslaufende [Born1999].

2.4.2 Lösungen der paraxialen Helmholtz-Gleichung

Eine Lösung dieser Differenzialgleichung ist die parabolische Welle [Mikro2010].

$$\text{Parabolische Welle} \quad E(x, y, z, t) = \frac{E_0}{z} \cdot e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2z}} \cdot e^{i(\omega t - kz)} \quad (2-24)$$

Die Parabolische Welle stellt die paraxiale Näherung einer Kugelwelle dar.

2.4.2.1 Der Gaußsche Grundmode

Ist die parabelförmige Welle eine Lösung dieser Wellengleichung, so ist auch eine Verschiebung in der Ortskoordinate $z + C$, wobei C eine Konstante darstellt, eine Lösung [Mikro2010]. Ist diese Verschiebung komplex wird sie oft zum komplexen Strahlparameter $q(z)$ zusammengefasst.

$$\begin{array}{l} \text{Komplexer} \\ \text{Strahlparameter} \end{array} \quad q(z) = z + iz_R \quad (2-25)$$

Damit ergibt sich folgender Ansatz:

$$E(x, y, z, t) = \frac{E_0}{q(z)} \cdot e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2q(z)}} \cdot e^{i(\omega t - kq(z))} \quad (2-26)$$

Weiterhin gilt:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{z - iz_R}{z^2 + z_R^2} = \frac{z}{z^2 + z_R^2} - i \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} \quad (2-27)$$

Wird nun (2-27) in (2-26) eingesetzt, folgt:

$$E(r(x, y), z, t) = \frac{E_0}{q(z)} \cdot e^{-r^2 \frac{k \cdot z_R}{2(z^2 + z_R^2)}} \cdot e^{-ikr^2 \frac{z}{2(z^2 + z_R^2)}} \cdot e^{i(\omega t - kq(z))} \quad (2-28)$$

Der Term $\exp\left(-r^2 \frac{k \cdot z_R}{2(z^2 + z_R^2)}\right)$ weist nur reelle Bestandteile auf und ähnelt einer Gaußverteilung.

Durch Einführung des gaußschen Strahlradius $w(z)$ wird dieser Zusammenhang noch deutlicher:

$$w^2(z) = \frac{2(z^2 + z_R^2)}{k \cdot z_R}$$

Wobei der kleinste Wert an der Position $z = 0$ als Tailenradius bezeichnet wird.

$$w_0 = w(z = 0) = \sqrt{\frac{2z_R}{k}} \quad (2-29)$$

Mithilfe dieser Beziehung ergibt sich für den Strahlradius:

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \quad (2-30)$$

Durch Gleichung (2-29) wurde auch eine Definition für das zuvor eingeführte z_R gefunden. z_R wird als Rayleighlänge bezeichnet und ist folgendermaßen definiert:

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (2-31)$$

Der Term $\exp\left(-ikr^2 \frac{z}{2(z^2 + z_R^2)}\right)$ beschreibt das Krümmungsverhalten der Wellenfront. Daher wird an dieser Stelle der Krümmungsradius $R(z)$ der Wellenfront eingeführt.

$$R(z) = \frac{z^2 + z_R^2}{z} = z \left(1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2\right) \quad (2-32)$$

Durch diese Einführungen, hat (2-28) nun folgende Form:

$$E(r(x, y), z, t) = \frac{E_0}{z + iz_R} \cdot e^{k \cdot z_R} \cdot e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}} \cdot e^{-i \frac{kr^2}{2R(z)}} \cdot e^{i(\omega t - kz)} \quad (2-33)$$

(2-33) entspricht noch nicht der Bedingung, dass im Koordinatenursprung zum Zeitpunkt $t = 0$ die Phasenverschiebung zu 0 kompensiert wird. Im Koordinatenursprung würde die Amplitude in der jetzigen Form nicht den reellen Wert E_0 annehmen. Die obige Beziehung ist daher noch mit $iz_R \cdot e^{-k \cdot z_R}$ zu multiplizieren. Anderenfalls gilt:

$$E(0,0,0) = E_0 \frac{1}{iz_R} \cdot e^{k \cdot z_R}$$

Mithilfe des Multiplikationsfaktors $iz_R \cdot e^{-k \cdot z_R}$ in (2-33) ergibt sich der Teilausdruck:

$$\frac{i}{z + iz_R} = \frac{1}{\sqrt{z^2 + z_R^2}} \cdot e^{i \arctan \frac{z}{z_R}}$$

Somit kann aus (2-33) die komplette Bildungsvorschrift für einen *Gaußstrahl* gewonnen werden:

$$E(r(x, y), z, t) = E_0 \frac{z_R}{\sqrt{z^2 + z_R^2}} \cdot e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}} \cdot e^{-ik \frac{r^2}{2R(z)}} \cdot e^{i(\omega t - kz)} \cdot e^{i \arctan \frac{z}{z_R}} \quad (2-34)$$

$$E(r(x, y), z, t) = E_0 \cdot \frac{w_0}{w(z)} \cdot e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}} \cdot e^{-ik \frac{r^2}{2R(z)}} \cdot e^{i(\xi(z) - kz)} \cdot e^{i\omega t}$$

Wobei der Ausdruck $\arctan \frac{z}{z_R}$ als Gouy-Phase $\xi(z)$ zusammen gefasst wurde.

$$\xi(z) = \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right) \quad (2-35)$$

2.4.2.2 Moden höherer Ordnung

Der erhaltene Gaußstrahl bildet die niedrigste Ordnung von vielen möglichen paraxialen Moden [Graf2009]. Um nach weiteren Lösungen der Form:

$$E(x, y, z, t) = \underline{E}(x, y, z) e^{i(\omega t - kz)} \quad (2-36)$$

mit komplexer Amplitude $\underline{E}(x, y, z)$ zu suchen, wird folgender Ansatz gewählt [Graf2009]:

$$\underline{E}(x, y, z) = E_0 \cdot A_m(x, z) \cdot A_n(y, z)$$

Die Indizes m und n stellen hierbei ganze Zahlen dar und charakterisieren die transversale Modenordnung. Das Verhalten der beiden transversalen Richtungen kann separat betrachtet werden. Wird (2-36) nun in (2-21) eingesetzt, so müssen Lösungen für die Differenzialgleichung der Form:

$$\frac{\partial^2 A_m}{\partial^2 x^2} - 2ik \frac{\partial A_m}{\partial z} = 0 \quad (2-37)$$

gefunden werden.

Zur Lösung dieser Differenzialgleichung wird als weiterer Lösungsansatz [Graf2009]:

$$A_m(x, z) = \underline{A}_m(q(z)) \cdot h_m\left(\frac{x}{p(z)}\right) \cdot e^{-ik \frac{x^2}{2q(z)}}$$

gewählt. Damit nimmt (2-37) nun die folgende Gestalt an:

$$h_m'' - 2ik \left(\frac{p}{q} - p' \right) x h_m' - ik \frac{p^2}{q} \left(1 + \frac{2q}{\underline{A}_m} \cdot \frac{d\underline{A}_m}{dq} \right) h_m = 0 \quad (2-38)$$

Diese Gleichung hat Ähnlichkeit mit der hermiteschen Differenzialgleichung [Wong1994]

$$H_m''(x) - 2xH_m'(x) + 2mH_m(x) = 0 \quad (2-39)$$

deren Lösung die hermiteschen Polynome bilden. Durch die folgende Rekursionsformel können die hermiteschen Polynome bestimmt werden:

$$H_{m+1}(x) = 2(xH_m(x) - mH_{m-1}(x)) \quad (2-40)$$

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

Durch geeignete Wahl von p und \underline{A}_m können die beiden Differenzialgleichungen (2-38) und (2-39) ineinander überführt werden. Mit diesen Bedingungen ergibt sich schließlich, im Falle von verschiedenen Lösungen für die x- bzw. y-Richtung, die Bildungsvorschrift [Graf2009], [Hügel2009]:

$$\begin{aligned} E_{mn}(x, y, z, t) = & E_{0,00} \cdot \sqrt{\frac{1}{2^{m+n} \cdot m! \cdot n! \cdot \pi}} \cdot e^{i(\omega t - kz)} \\ & \cdot \sqrt{\frac{w_{0x,0}}{w_{x,0}(z)}} \cdot H_m\left(\frac{\sqrt{2} \cdot x}{w_{x,0}(z)}\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{w_{x,0}^2(z)}} \cdot e^{-ik \frac{x^2}{2R_x(z)}} \\ & \cdot \sqrt{\frac{w_{0y,0}}{w_{y,0}(z)}} \cdot H_n\left(\frac{\sqrt{2} \cdot y}{w_{y,0}(z)}\right) \cdot e^{-\frac{y^2}{w_{y,0}^2(z)}} \cdot e^{-ik \frac{y^2}{2R_y(z)}} \\ & \cdot e^{i(m+\frac{1}{2})\arctan \frac{z}{z_{Rx}}} \cdot e^{i(n+\frac{1}{2})\arctan \frac{z}{z_{Ry}}} \end{aligned} \quad (2-41)$$

Der Vorfaktor $\sqrt{\frac{1}{2^{m+n} \cdot m! \cdot n! \cdot \pi}}$ resultiert aus der Orthogonalitätsrelation [Wong1994]:

$$\frac{1}{2^m m! \sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{2}}{w(z)} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[H_m \left(\frac{\sqrt{2} \cdot x}{w(z)} \right) \right]^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{w^2(z)}} dx = 1 \quad (2-42)$$

Dadurch ist die Berechnung der im Strahlprofil eingeschlossenen Leistung nur noch von $E_{0,00}$ und $w_{0,00}$ abhängig (siehe Anlagen **B**).

Weiterhin wird in (2-41) ersichtlich, dass sich für $m = n = 0$ der bereits diskutierte Gaußstrahl ergibt.

Moden höherer Ordnung werden auch als transversal elektromagnetische Moden TEM_{mn} definiert. Die Indizes m und n stehen dabei für die Ordnung der Mode und sind ein Maß für die Nullstellen in x- bzw. y-Richtung. Der Gaußstrahl wird daher auch als Grundmode oder TEM_{00} bezeichnet. Schon in (2-41) wurden diese Indizes verwendet um zu verdeutlichen, dass die Bildung durch die Größen des Grundmodes erfolgt und nicht durch die tatsächlichen Radien bzw. Amplituden der Moden höherer Ordnung.

Wird die paraxiale Helmholtz-Gleichung (2-21) in Zylinderkoordinaten (viii) aufgestellt, so erfolgt die Lösung analog. Die Lösung führt dabei auf die Laguerresche Differenzialgleichung [Wong1994]:

$$x L_p^l{}''(x) + (l + 1 - x) L_p^l{}'(x) + p L_p^l(x) = 0 \quad l \leq p \quad (2-43)$$

deren Lösung die Laguerre-Polynome sind. Diese sind durch die folgende Reihendarstellung gegeben:

$$L_p^l(x) = \sum_{s=0}^p (-x)^s \frac{(p+l)!}{(l+s)! \cdot (p-s)! \cdot s!} \quad (2-44)$$

Als resultierende Bildungsvorschrift für die elektrische Feldstärke ergibt sich [Graf2009], [Hügel2009]:

$$\begin{aligned}
 E_{pl}(r, \varphi, z, t) = & E_{0,00} \cdot \sqrt{\frac{2p!}{(1 + \delta_{0l}) \cdot (p + l)! \cdot \pi}} \cdot e^{i(\omega t - kz)} \\
 & \cdot \frac{w_{0,00}}{w_{00}(z)} \cdot \left(\frac{\sqrt{2} \cdot r}{w_{00}(z)} \right)^l L_p^l \left(\frac{2 \cdot r^2}{w_{00}^2(z)} \right) \\
 & \cdot e^{-\frac{r^2}{w_{00}^2(z)}} \cdot e^{-ik \frac{r^2}{2R(z)}} \cdot \cos(l\varphi) \cdot e^{i(2p+l+1) \arctan \frac{z}{z_R}}
 \end{aligned} \tag{2-45}$$

Der tatsächliche Radius höherer Moden kann mithilfe des 2. Moments nach DIN EN ISO 11145-1:2005 [DIN2005] bestimmt werden:

$$\sigma_x^2(z) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot I(x, y, z) dx dy \right) : \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(x, y, z) dx dy \right) \tag{2-46}$$

Diese Gleichung gilt unter der Voraussetzung, dass sich der Schwerpunkt (1. Moment) des Strahlprofils auf der Strahlachse befindet, was bei den gegebenen Moden der Fall ist. Somit berechnen sich die Radien höherer Moden wie folgt:

$$w_x(z) = 2 \sqrt{\sigma_x^2(z)} \tag{2-47}$$

$$w_{x,m}(z) = w_{x,0}(z) \cdot \sqrt{2m + 1} \tag{2-48}$$

$$w_{y,n}(z) = w_{y,0}(z) \cdot \sqrt{2n + 1}$$

$$w_{pl}(z) = w_{00}(z) \cdot \sqrt{2p + l + 1} \tag{2-49}$$

Der Beweis für die Gauß-Hermite-Moden ist im Anhang unter Anlagen **B**, zu finden.

2.5 Das Kirchhoff-Fresnelsche Beugungsintegral

Beugung bezeichnet jenes Phänomen der Optik, das die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in den Schattenraum von Objekten erklärt. Die Beugung kann mithilfe des Huygens-Fresnelschen Prinzips erklärt werden. Dieses besagt, dass jeder Punkt, der von einer Wellenfront erfasst wird, als Ausgangspunkt einer Elementarwelle dient. Die Elementarwelle hat eine halbkugelförmige Gestalt und erlaubt somit keine Ausbreitung in Rückwärtsrichtung. Die resultierende Wellenfront wird durch Superposition der einzelnen Elementarwellen gebildet. Zur numerischen Simulation der Laserstrahlpropagation ist es notwendig, dieses Prinzip in eine mathematische Form zu fassen. Eine allgemeine mathematische Formulierung ist jedoch sehr aufwändig, da der Vektorcharakter der elektrischen Feldstärke \vec{E} bzw. der magnetischen Flussdichte \vec{B} berücksichtigt werden müsste. Daher wird die skalare Näherung verwendet, welche zwar den Wellencharakter des Lichtes berücksichtigt, jedoch vektorielle Effekte, wie Polarisation, vernachlässigt.

Gustav Kirchhoff versuchte diese skalare Näherung in mathematische Form zu bringen. Er ging dabei von den Bedingungen aus, dass die elektrische Feldstärke, sowie ihre erste und zweite Ableitung, in jedem Punkt des betrachteten räumlichen Gebiets und auch auf dessen Rand eindeutig und stetig sei [Born1999]. Weitere Bedingungen sind, dass es sich um streng monochromatische Felder mit einer harmonischen Zeitabhängigkeit handelt.

Ausgangspunkt der Betrachtungen sei die Helmholtz-Gleichung (2-19) für skalare Felder.

$$(\Delta + k^2)E = 0$$

Gegeben sei weiterhin eine auf die Fläche A_0 einfallende Welle mit der elektrischen Feldstärke $E_{S0}(x_0, y_0, z_0)$ ($x_0, y_0, z_0 \in A_0$). Gesucht wird die elektrische Feldstärke $E_1(x_1, y_1, z_1)$ eines jeden Punktes $P_1(x_1, y_1, z_1)$ auf der Fläche A_1 .

Kirchhoff verallgemeinerte zunächst seine Überlegungen und betrachtete ein beliebiges Volumen V . Dessen Oberfläche ∂V emittiert durch Anregung mittels externer Quellen $E(\vec{x})$ Elementarwellen nach dem Huygens-Fresnelschen Prinzip. Ein beliebiger Punkt $\vec{p} = (x_p, y_p, z_p)^T$ wird von diesen Elementarwellen erfasst. Für die weiteren Betrachtungen wird eine Hilfsfunktion G benötigt. Die Funktion G beschreibt eine Kugelwelle der Form:

$$G(r) = \frac{e^{ikr}}{r} \quad (2-50)$$

mit $r = |\vec{x} - \vec{p}|$ und kann als Elementarwelle gedeutet werden. $E(\vec{x})$ sowie $G(r)$ sollen Lösungen von (2-19) darstellen.

Für die weiteren Schritte dient die zweite greensche Identität (xi):

$$\iiint_V (G \cdot \Delta E - E \cdot \Delta G) dV = \oiint_{\partial V} (G \cdot \nabla E - E \cdot \nabla G) d\vec{A}$$

Durch Umstellen von (2-19) und anschließenden Einsetzen in (xi), ergibt sich:

$$\Delta E = -kE^2 \text{ bzw. } \Delta G = -kG^2$$

$$\iiint_V (G \cdot \Delta E - E \cdot \Delta G) dV = \iiint_V (-G \cdot k^2 E + E \cdot k^2 G) dV = 0$$

Demnach gilt:

$$\oiint_{\partial V} (G \cdot \nabla E - E \cdot \nabla G) d\vec{A} = 0 \quad (2-51)$$

Für die weiteren Betrachtungen muss der Punkt \vec{p} aus der Oberfläche ∂V ausgeschlossen werden, da $G(r)$ für $r = 0$ keine Lösung von (2-19) ist. Der Grund ist, dass die Betrachtungen der Bedingung der Stetigkeit der elektrischen Feldstärke innerhalb V bzw. ∂V zugrunde liegen. Um den Punkt \vec{p} wird daher ein infinitesimal kleines Kugelelement K ausgeschnitten (siehe Abb. 2-1).

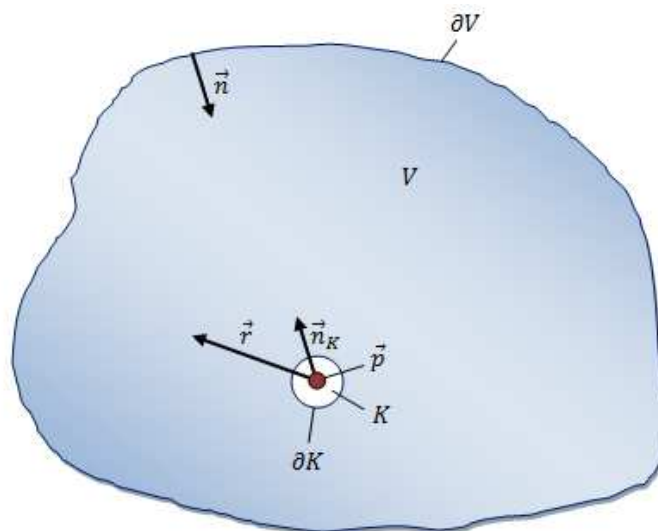


Abb. 2-1 Integrationsvolumen mit Ausschluss des Punktes \vec{p}

Die Integration (2-51) muss durch den Ausschluss von \vec{p} über zwei Bereiche erfolgen:

$$\oint\oint_{\partial V} (G \cdot \nabla E - E \cdot \nabla G) d\vec{A} + \oint\oint_{\partial K} (G \cdot \nabla E - E \cdot \nabla G) d\vec{A}' = 0 \quad (2-52)$$

Ferner wird ab jetzt die Beziehung:

$$d\vec{A} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} dA_{Ob} = \vec{n}_0 dA_{Ob} \quad (2-53)$$

sowie die Definition der Richtungsableitung genutzt:

$$\frac{\partial E}{\partial n_0} = \vec{n}_0 \cdot \nabla E \quad (2-54)$$

Der Radius des Kugelsegments wird immer kleiner gewählt und mit (2-50) und (2-53) folgt:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint\oint_{\partial K} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \cdot \nabla E - E \cdot \nabla \frac{e^{ikr}}{r} \right) \vec{n}_{K0} dA'_{Ob}$$

Durch $dA'_{Ob} = r^2 d\Omega$ und $\vec{n}_{K0} || \vec{e}_r$ folgt:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint\oint_{\partial K} \left(r \cdot e^{ikr} \cdot \frac{\partial E}{\partial n_0} + E \cdot (1 - ikr) e^{ikr} \right) d\Omega = E(\vec{p}) \oint\oint_{\partial K} d\Omega = 4\pi E(\vec{p})$$

Damit ergibt sich (2-52) zu:

$$E(\vec{p}) = -\frac{1}{4\pi} \oint\oint_{\partial V} (G \cdot \nabla E - E \cdot \nabla G) d\vec{A} \quad (2-55)$$

Dies ist eine mögliche Form des Integraltheorems von Helmholtz und Kirchhoff [Born1999]. Für die weiteren Betrachtungen werden Vereinfachungen und Näherungen getroffen. Kirchhoff betrachtete eine Anordnung mit begrenzender Apertur an einer Position z . Er führte dazu das Integral über die in **Abb. 2-2** dargestellten drei Flächenabschnitte A_1 , A_2 und A_3 aus. Von jeder Fläche werden Sekundärwellen emittiert, welche einen Beitrag zur resultierenden Feldstärke im Punkt \vec{p} leisten.

A_1 beschreibt die Öffnung der Apertur, A_2 den nichtbeleuchteten hinteren Teil der Apertur und A_3 die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius \vec{R} um den Punkt \vec{p} .

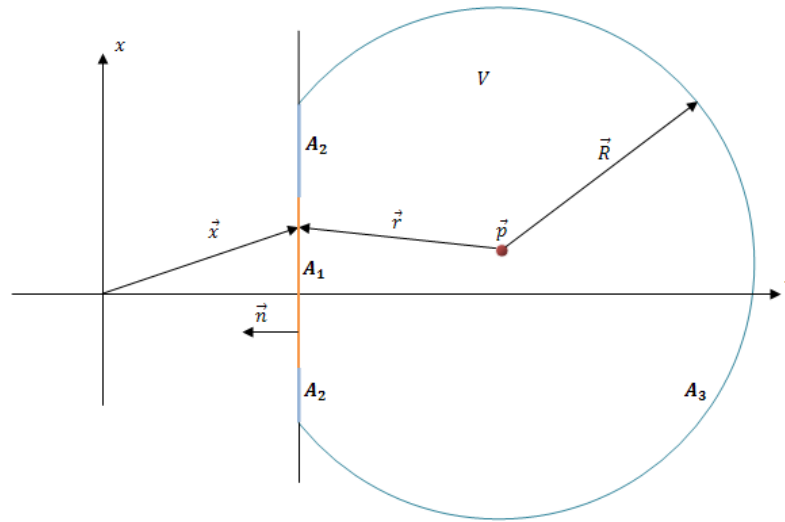


Abb. 2-2 Darstellung der gewählten Oberflächen nach Kirchhoff

Der Radius von Gebiet A_3 kann beliebig groß gewählt werden, sodass von diesem Gebiet keine nennenswerten Beiträge zur resultierenden Feldstärke am Punkt \vec{p} stammen. Die Integration über dieses Gebiet kann somit vernachlässigt werden. Die Werte der elektrischen Feldstärke im Gebiet A_1 sollen wesentlich verschieden von 0 sein und sich nur unmerklich von den Werten unterscheiden, welche ohne Vorhandensein der Apertur an den jeweiligen Positionen auftreten würden. Für das Gebiet A_2 wird postuliert, dass kein elektrisches Feld auf diesem vorhanden ist und somit die Feldstärke an jedem Punkt den Wert 0 annimmt.

Die Integration erfolgt somit nur noch über das Gebiet A_1 . Zusammen mit (2-50) und (2-54) ergibt sich aus (2-55):

$$\begin{aligned}
 E(\vec{p}) &= -\frac{1}{4\pi} \oiint_{A_1} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{\partial E}{\partial \vec{n}_0} - \vec{n}_0 \cdot E \cdot \nabla \frac{e^{ikr}}{r} \right) dA_1 \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \oiint_{A_1} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \cdot \left[\frac{\partial E}{\partial \vec{n}_0} + ikE \cdot \left(1 - \frac{i}{kr} \right) \cdot \cos(\vec{n}_0, \vec{e}_r) \right] \right) dA_1
 \end{aligned} \tag{2-56}$$

Dies stellt die allgemeine Formulierung der Näherungen von Kirchhoff dar. Wird weiterhin angenommen, dass sich die Welle paraxial ausbreitet und sich der Punkt \vec{p} in einem Mindestabstand von mehreren Wellenlängen von der Fläche A_1 befindet, kann die Phasenfront der elektromagnetischen Welle lokal durch eine ebene Welle (2-22) genähert werden [Graf2009].

$$\frac{\partial E}{\partial \vec{n}_0} = \vec{n}_0 \cdot \nabla E = \vec{n}_0 \cdot \nabla E_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}} = -ikE \cos(\vec{n}_0, \vec{k})$$

Weiterhin kann der Term $\left(1 - \frac{i}{kr}\right)$ rund 1 gesetzt werden, da aufgrund des Abstandes mehrerer Wellenlängen der Imaginärteil sehr klein wird. Somit folgt:

$$E(\vec{p}) = -\frac{ik}{4\pi} \iint_{A_1} \left(\frac{e^{ikr}}{r} E \cdot [\cos(\vec{n}_0, \vec{e}_r) - \cos(\vec{n}_0, \vec{k})] \right) dA_1 \quad (2-57)$$

$$= \frac{1}{i\lambda} \iint_{A_1} \left(\frac{e^{ikr}}{r} E \cdot N \right) dA_1$$

Die Formulierung wird als Kirchhoff-Fresnelsches Beugungsintegral bezeichnet. Sie enthält den Ausdruck N , welcher auch Neigungs- oder Stokes-Faktor genannt wird [Born1999], [Mesch2008].

$$\text{Neigungsfaktor} \quad N = \frac{1}{2} (\cos(\vec{n}_0, \vec{e}_r) - \cos(\vec{n}_0, \vec{k})) \quad (2-58)$$

Befindet sich der Punkt \vec{p} in hinreichend großer Entfernung zur Abstrahlfläche kann der Neigungsfaktor in guter Näherung gleich 1 gesetzt werden.

Mit zu Beginn des Unterkapitels formulierten Größen und mit $N \cong 1$, nimmt das Integral folgende Gestalt an:

$$E_1(x_1, y_1, z_1) = \frac{n_0}{i \cdot \lambda_0} \cdot \iint_{A_0} \frac{E_{S0}(x_0, y_0, z_0)}{r} \cdot e^{i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot r} dA_0 \quad (2-59)$$

Zur Veranschaulichung wurden die verwendeten Größen noch einmal in der nachfolgenden Abbildung schematisch dargestellt.

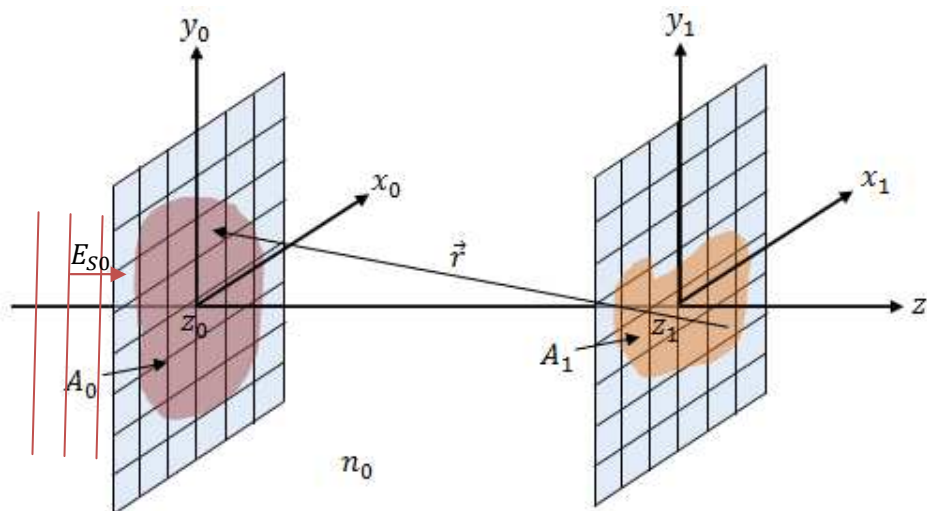


Abb. 2-3 Schematische Darstellung der Start- und Zielfläche sowie den Abstand der Elemente

3 Numerische Realisierung und ausgewählte

Programmabschnitte

Ziel war es die theoretischen Beschreibungen der Wellenausbreitung auf der Grundlage des Beugungsintegrals in eine geeignete Programmiersprache umzusetzen. Als Entwicklungsumgebung wurde dazu MATLAB ausgewählt. MATLAB (*Matrix Laboratory*) ist eine plattformunabhängige Software, basierend auf Vektor- und Matrizenoperationen, welche die numerische Berechnung und grafische Darstellung vieler wissenschaftlicher und technischer Probleme ermöglicht. Die mathematische Beschreibung steht im Vordergrund und ist dementsprechend so gestaltet, dass die Programmiersprache für einen Benutzer mit mathematischen Grundkenntnissen, vor allem im Bereich der Vektor- und Matrizenrechnung, sehr anwendungsfreundlich ist. MATLAB enthält sogenannte Built-In-Functions, die eine optimierte Rechenzeit für Vektoroperationen aufweisen und so programmiert sind, dass sie sich kaum von der Rechengeschwindigkeit eines in C geschriebenen Programmes unterscheiden. Um eine hohe Leistung und Rechengeschwindigkeit zu erhalten, ist es demnach notwendig den Programmcode zu vektorisieren. Ein optimierter MATLAB Programmcode enthält dementsprechend keine langsamen for-Schleifen sondern Vektor- und Matrixoperationen.

3.1 Numerische Integration und Umsetzung

Da für die im Punkt 2.5 hergeleiteten Formeln (2-57) bzw. (2-59) in den meisten Anwendungsfällen keine analytische Lösung existiert, bleibt nur der Ausweg durch numerische Integration.

Das Integral kann auch als Aufsummierung unendlich vieler infinitesimal kleiner Flächenelemente der Breite dx bzw. dy verstanden werden. Die Gesamtfläche wird daher in möglichst viele hinreichend kleine Elemente der Breite Δx bzw. Δy aufgeteilt. Sind die Elemente klein genug gewählt, so kann das Integral sehr gut durch eine Summenbildung approximiert werden. (2-57) nimmt dadurch die folgende Form an:

$$E(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{i\lambda} \sum_{u=1}^{n_x} \sum_{v=1}^{n_y} \left(\frac{E_{uv}}{r_{uv}} \cdot N_{uv} \cdot \exp(ikr_{uv}) \right) \Delta x \Delta y \quad (3-1)$$

Die Summation zur Berechnung der Feldstärkeverteilung eines Elementes der Zielfläche lässt sich in MATLAB sehr leicht mithilfe des Befehls `sum(sum())` erreichen. Dazu ist es notwendig für jede der enthaltenen Größen eine Matrix der gleichen Dimension zu erstellen. Hierfür wird die Startfläche in diskrete Elemente eingeteilt und jedem Element x-,y- und z-Koordinaten sowie ein Feldstärkewert E_0 zugeordnet. Aus den Startkoordinaten wird über

$$r_{uv} = \sqrt{(x_{uv} - x_1)^2 + (y_{uv} - y_1)^2 + (z_{uv} - z_1)^2} \quad (3-2)$$

der Abstand zum Zielelement berechnet. In MATLAB umgesetzt bedeutet dies:

```
abstand=sqrt((X0-x1(c)).^2+Y0.^2+(Z0-z1(c)).^2);
```

Dabei werden die sogenannten „“-Operationen in MATLAB genutzt. Sie ermöglichen es Rechenoperationen, wie hier die Quadratur, auf jedes enthaltene Element einzeln anzuwenden. Im nächsten Schritt wird eine Matrix berechnet, die den Anteil einer jeden Elementarwelle der Startfläche für das Zielelement enthält.

```
Eele=E0.*exp(1i*nindex*k*abstand)./abstand*A0.*(alpha-beta)/2;
```

A_0 ist an dieser Stelle das Produkt aus der Elementgröße in x- und y-Richtung und α bzw. β die beiden Winkel des Neigungsfaktors. Abschließend erfolgt die Summation.

```
Eges(c)=Eges(c)+sum(sum(Eele));
```

Um die gesamte Feldstärkeverteilung auf der Zielfläche zu erhalten, muss dieser Algorithmus für weitere Elemente der Zielfläche wiederholt werden. Für wie viele Elemente diese Rechnung durchgeführt werden muss, richtet sich nach der im Strahlprofil vorhandenen Symmetrie. Eine genauere Beschreibung dazu ist im nachfolgenden Abschnitt zu finden.

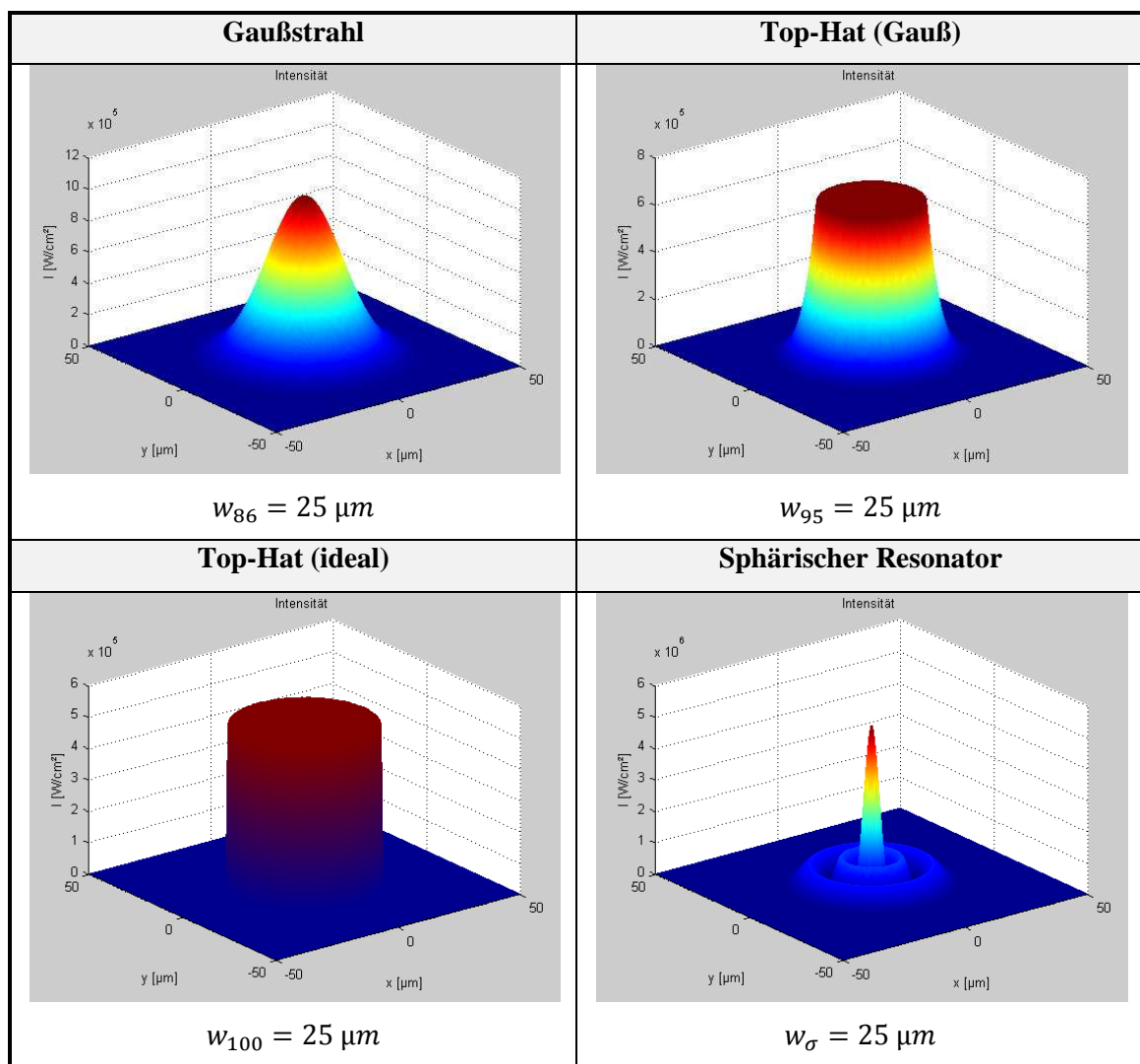
3.2 Berechnungsmöglichkeiten

Der Benutzer kann zwischen der Berechnung mit und ohne Rotationssymmetrie zu wählen. Beide Optionen unterscheiden sich in den verfügbaren Berechnungsmöglichkeiten und vor allem in der Berechnungsart. Anzumerken ist, dass sich in der bisherigen Programmversion nur die Ausbreitung monochromatischer, kohärenter elektromagnetischer Strahlung ohne Angabe der Polarisation berechnenbar ist.

3.2.1 Rotationssymmetrie

In dieser Berechnungsart können rotationssymmetrische Verteilungsfunktionen und -Oberflächengeometrien berechnet werden. Als Berechnungsmethode der Laserstrahlpropagation für Rotationssymmetrie stehen zwei Auswahlmöglichkeiten für jede Fläche zur Verfügung. Zum einen ist die Abstrahlgeometrie Fläche und zum andere die Abstrahlgeometrie Linie wählbar.

Mögliche Intensitätsverteilungen

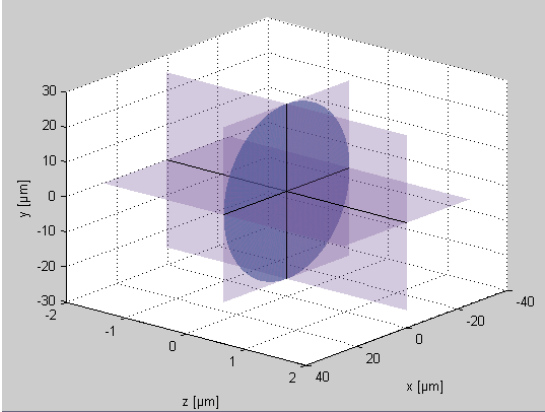
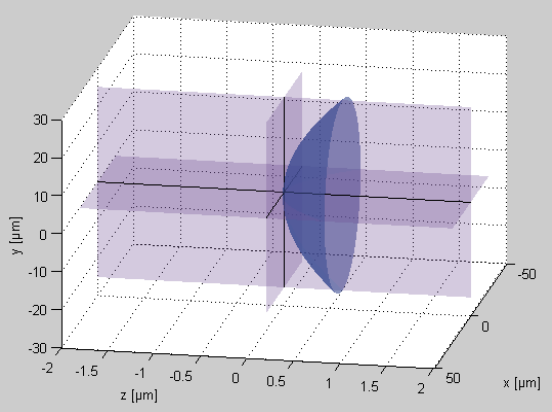
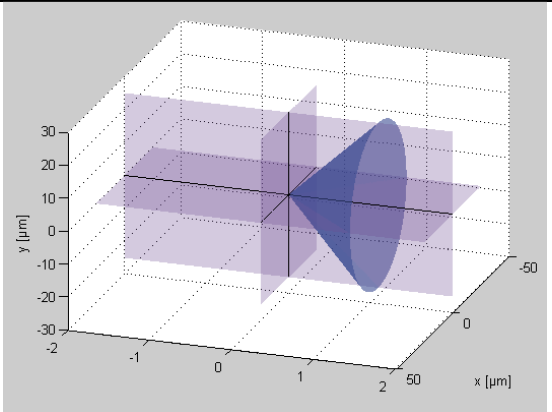


Tab. 3-1 Mögliche Intensitätsverteilung der Rotationssymmetrie; enthaltene Leistung 10 W

Zur Auswahl stehen rotationssymmetrische Verteilungen, wie Gaußstrahl, Top-Hat (Gauß), Top-Hat (ideal) und Gauß-Laguerre-Moden, welche nur durch radiale Nullstellen

gekennzeichnet sind, zur Verfügung. Dabei werden jeweils unterschiedliche Strahlradien zur Erzeugung eingegeben. Deren Berechnungsgrundlage ist im Anhang unter **D 3.1** zu finden. Zur Visualisierung wurden die möglichen Intensitätsverteilungen in **Tab. 3-1** dargestellt.

Oberflächengeometrie

Ebene	Sphärisch
$Z_i = z_i$	$Z_i = -\text{sgn}(R_i) \cdot \sqrt{R_i^2 - X_i^2 - Y_i^2} + z_i + R_i$
	
Parabolisch	Hyperbolisch
$Z_i = \text{sgn}(a_i) \cdot \frac{1}{2a_i^2} (X_i^2 + Y_i^2) + z_i$	$Z_i = z_i + c_i \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{a_i^2} (X_i^2 + Y_i^2)} - 1 \right)$
Elliptisch	Axikon
$Z_i = z_i - c_i \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{a_i^2} (X_i^2 + Y_i^2)} - 1 \right)$	$Z_i = z_i \cdot \frac{1}{\tan \alpha_i} \sqrt{X_i^2 + Y_i^2}$
	

Tab. 3-2 Mögliche Oberflächenformen; Darstellung: Begrenzung als Kreis mit $R_{\text{aperture}} = 25 \mu\text{m}$, $z_i = 0$

Neben den Standardflächenformen, wie Ebene oder Kugeloberfläche, sind auch andere Formen, wie parabolisch, hyperbolisch, elliptisch und kegelförmig (Axikon) verfügbar. Zur Visualisierung ist jeweils für die Start- und Grenzflächen eine Vorschau möglich. Einige ausgewählte Oberflächenformen sowie deren Berechnungsgrundlage sind in **Tab. 3-2** dargestellt. Da zwischen sphärischen, parabolischen, hyperbolischen und elliptischen Flächen optisch kein deutlicher Unterschied sichtbar ist, wurde in **Tab. 3-2** nur eine sphärische Fläche visualisiert. Weiterhin sind die Start- und Grenzflächen an beliebigen Positionen z_i auf der z-Achse erzeugbar. Als Begrenzung steht im Falle der Rotationssymmetrie ein Kreis und ein Ring zu Verfügung.

Elementgröße

Der Benutzer kann für die Elementgröße zwischen mehreren Möglichkeiten wählen. Zum einen stehen ihm die voreingestellten Elementgrößen von 2λ , λ sowie $0,5\lambda$ zur Verfügung. Zum anderen kann er die Elementgröße oder die Elementanzahl selbst bestimmen. Eine Untersuchung welche Elementgröße notwendig ist um ein hinreichend genaues Ergebnis zu erhalten, ist unter **4.1** zu finden.

Die Elementanzahl n_x in x-Richtung wird nach folgender Berechnungsvorschrift ermittelt:

$$n_x = \text{aufrunden}\left(\frac{2 \cdot \text{Begrenzungsradius}}{\text{Elementabstand}}\right) \quad (3-3)$$

$$\text{Wenn: } n_x = \text{gerade,} \quad \text{dann } n_x = n_x + 1$$

Für Berechnungen auf Basis der Rotationssymmetrie wird die Feldstärke entlang einer Linie in negativer x-Richtung ermittelt und daraus anschließend die Feldstärkeverteilung für die komplette Fläche berechnet. Durch die ungerade Elementanzahl tritt das Element in der Mitte nicht mehrfach im verwendeten Algorithmus auf. Eine gerade Elementanzahl wäre auch möglich, jedoch müsste vor jedem Algorithmus geprüft werden, ob eine gerade oder ungerade Anzahl vorliegt. Zudem müsste der Algorithmus für beide Fälle modifiziert werden. Der Einfachheit halber wurde deshalb die ungerade Elementanzahl festgelegt.

Abstrahlgeometrie Fläche

Wurde die Abstrahlgeometrie Fläche gewählt, wird die Startfläche A_0 zunächst, entsprechend **Abb. 2-3**, in äquidistante Elemente in x- und y-Richtung mit der gewählten Elementgröße aufgeteilt. Die z-Koordinaten werden mithilfe der x- und y-Koordinaten entsprechend der gewählten Oberflächenform (siehe **Tab. 3-1**) erzeugt. Für jede Koordinate wird dazu eine separate Matrix erzeugt. Anschließend wird jedem Punkt $P_0(x_0, y_0)$ eine Feldstärke zugeordnet. Gebiete, welche außerhalb der Begrenzung liegen, erhalten den Feldstärkewert 0. Für die Erzeugung der kompletten Startfläche sind demnach 4 Matrizen der Dimension $nx \times nx$ notwendig. Die Elementgröße und Elementanzahl ist in y-Richtung genau so groß wie in x-Richtung, da ansonsten ein Verstoß gegen die Rotationssymmetrie vorliegt.

Wurde vom Benutzer eine große radiale Ausdehnung bei entsprechend kleiner Elementgröße gewählt, enthält eine Matrix oft mehrere Millionen Elemente. Jedes Element wird vom Typ double gespeichert und nimmt 8 Byte in Anspruch. Bereits bei Ausdehnungen von wenigen Millimetern wäre die verfügbare Kapazität des Arbeitsspeichers erreicht und eine Berechnung nicht mehr möglich. Eine Abhilfe schafft in diesem Fall die Einführung von Sektoren (Teilmatrizen). Jede Matrix wird in einzelne Sektoren mit einer Größe von bis zu 2000×2000 Elementen aufgeteilt.

Das folgende Beispiel soll die Sektorisierung etwas verdeutlichen:

Gegeben seien die x-Koordinaten durch $x = (1, 2, \dots, 8)$. Der Vektor x enthält $nx = 8$ Elemente. Aus diesem Zeilenvektor wird durch den folgenden Befehl eine Matrix X der Größe 8×8 erzeugt (siehe **Abb. 3-1**).

$$X = \text{ones}(nx, 1) \cdot x;$$

Da die Matrix X zu groß für den Arbeitsspeicher ist, muss sie in kleinere Matrizen (Sektoren) aufgeteilt werden. Hier wurde die Trennung nach 3 Elementen in Zeilen- bzw. Spaltenrichtung vollzogen. Demnach werden für diese Matrix 9 Sektoren erstellt. Die Sektoren der letzten Zeile bzw. letzte Spalte haben i.d.R. aufgrund der gegebenen Elementanzahl eine kleinere Größe als die anderen Sektoren.

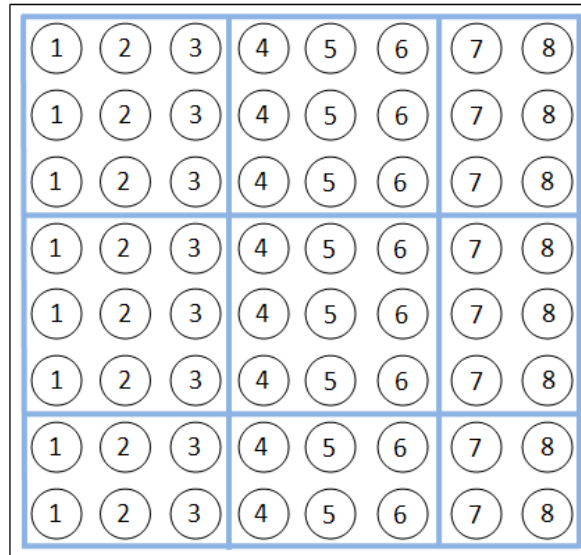


Abb. 3-1 Schematische Darstellung der Sektorisierung der Matrix X ; blau: Abgrenzung der Sektoren

Die erzeugten Matrizen werden als mat-Files gespeichert. Dies ist ein MATLAB-eigenes Dateiformat und bewirkt eine optimierte Speicher- und Ladezeit, d.h. die Berechnungszeit mittels Sektoren ist nur geringfügig größer als die Berechnung mit der gesamten Matrix.

Jeder Sektor wird im weiteren Programmablauf separat in den Arbeitsspeicher geladen und mit ihm wird der bereits unter **3.1** beschriebene Algorithmus ausgeführt. Für die resultierende Feldstärke auf der Zielfläche spielt es aufgrund der Summenbildung keine Rolle ob die Berechnung des Zielelementes in einem Schritt oder mehreren Teilschritten mittels Sektoren erfolgt.

Die Abbildung auf die Zielfläche benötigt nur einen geringen Rechenaufwand, da aufgrund der Rotationssymmetrie die Feldstärkeverteilung lediglich entlang einer Linie in negativer x -Richtung berechnet werden muss. Für die weitere Berechnung ist es jedoch notwendig aus dieser Linie wieder eine Fläche zu generieren. Dazu müssen zunächst positive radiale Koordinaten (rI) gebildet werden. Radiale Koordinaten mit gleichem Betrag besitzen aufgrund der rotationssymmetrischen Eigenschaften die gleichen berechneten Werte der elektrischen Feldstärke. Da die erhaltene Feldstärke auf der Zielfläche komplexe Werte enthält, muss zunächst eine Trennung von Real- und Imaginärteil (*EgesReal* und *EgesImag*) vorgenommen werden. Für beide Teile wird separat ein Spline (*ESplineReal* und *ESplineImag*) erstellt. Anschließend wird eine Matrix r erzeugt, die den Abstand eines jeden Punktes der Zielfläche vom Koordinatenursprung der Zielfläche enthält. Für jede Zeile dieser Matrix werden mithilfe der beiden Splines die Real- und Imaginärteile (*EReal* und *EImag*) der Feldstärke für die gesamte Fläche ermittelt. Um Rechenzeit zu sparen wird diese Operation nur für die halbe

Fläche durchgeführt und im nächsten Schritt gespiegelt. Anschließend wird die Feldstärke E_0 aus beiden Anteilen wieder zusammengesetzt. In MATLAB umgesetzt bedeutet dies:

```

r1=x1l:-x1s:0;
ESplineReal=spline(r1,EgesReal);
ESplineImag=spline(r1,EgesImag);
clear EgesReal;
clear EgesImag;

r=sqrt(X0.^2+Y0.^2);

EReal=zeros(nx1,nx1);
EImag=zeros(nx1,nx1);
for s=1:length(Eges)
    EReal(:,s)=ppval(ESplineReal,r(:,s));
    EImag(:,s)=ppval(ESplineImag,r(:,s));
end;

clear ESplineReal;
clear ESplineImag;

EReal=[EReal(:,1:ceil(nx1/2)-1),fliplr(EReal(:,(1:ceil(nx1/2))))];

EImag=[EImag(:,1:ceil(nx1/2)-1),fliplr(EImag(:,(1:ceil(nx1/2))))];

E0=EReal+1i*EImag;

```

Nicht mehr benötigte Variablen werden sofort mit dem Befehl *clear* gelöscht um den belegten Speicherplatz wieder frei zu geben.

Für die Berechnung auf der Zielfläche werden demnach 6 Matrizen benötigt. Zusammen mit den 4 Matrizen der Startfläche und den beiden Matrizen, die in Zwischenschritten erzeugt werden (*abstand* und *Eele*), werden insgesamt 12 Matrizen benötigt. Eine Berechnung ohne Sektorisierung wäre für große Ausdehnungen nicht möglich.

Zur Abschätzung der benötigten Sektoren und der Gesamtgröße aller Matrizen einer jeweiligen Fläche wurde eine Funktion erstellt, welche diese Größen ausgibt. Weiterhin wird in dieser Funktion in den späteren Programmversionen die ungefähre Berechnungszeit angegeben werden. Die Grundlage der Berechnungszeit bilden die Untersuchungen unter **4.3**.

Abstrahlgeometrie Linie

Bei der Berechnungsmethode Linie ist es lediglich notwendig die elektrische Feldstärke der Startfläche entlang einer Linie zu erzeugen. Daher werden nur noch die x- und z-Koordinaten dieser Linie benötigt. Die resultierende Feldstärke auf der Zielfläche wird entlang der negativen x-Achse berechnet. Um die Feldstärkeverteilung für die Ziellinie zu erhalten, muss nur eine Spiegelung an der y-Achse durchgeführt werden. Die Berechnung der elektrischen Feldstärke für die komplette Zielfläche entfällt. Lediglich 7 Matrizen, welche nur nx Elemente anstatt $nx \times nx$ Elemente enthalten, werden benötigt. Der benötigte Speicher- und Rechenaufwand reduziert sich dadurch um mehrere Größenordnungen. Eine Sektorisierung wäre erst bei Ausdehnungen von einigen Metern notwendig. Die drastisch reduzierte Anzahl der enthaltenen Elemente verringert deutlich die benötigte Berechnungszeit, was unter 4.3 ersichtlich wird.

Die Berechnungen zwischen den Abstrahlgeometrien unterscheiden sich. So stellt z.B. die Verwendung einer Kreisblende bei der Abstrahlgeometrie Linie, die Beugung an einem Spalt dar und nicht die Beugung an einer Kreisblende. Weiterhin werden einige Effekte nur richtig berechnet, wenn die Flächenabstrahlung genutzt wird. Die Linienabstrahlung ist sehr gut geeignet um die einfache Propagation eines Gaußstrahles schnell zu berechnen.

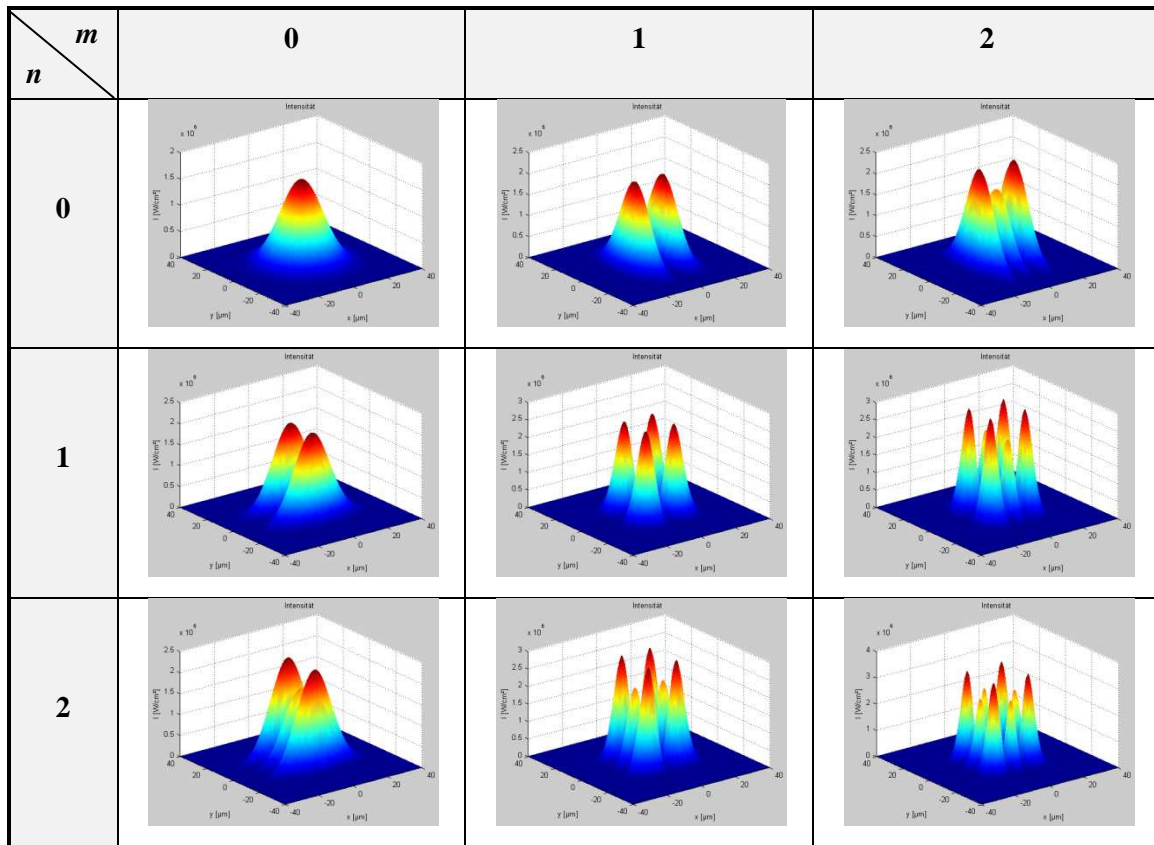
3.2.2 Keine Rotationssymmetrie

In dieser Symmetrieart stehen beliebige Oberflächenformen und symmetrieverletzende Elemente zur Verfügung.

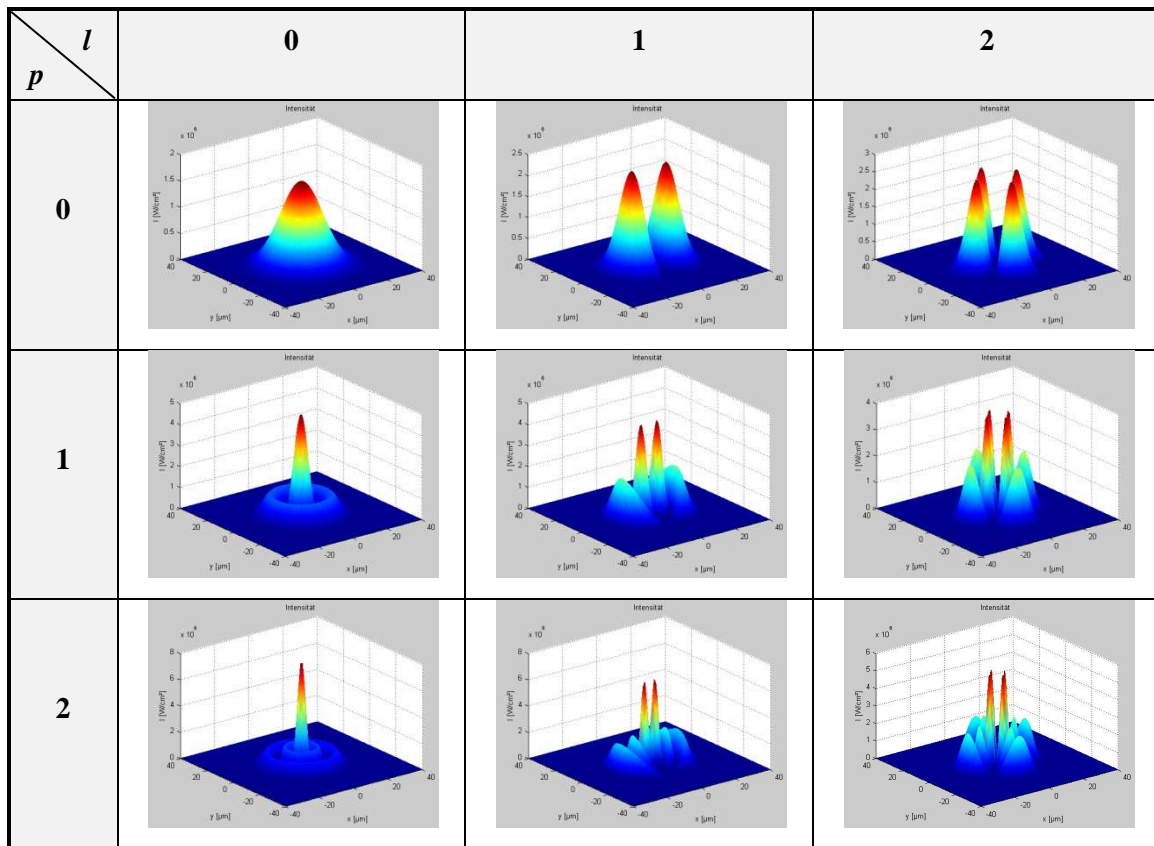
Mögliche Intensitätsverteilungen

Neben den möglichen Intensitätsverteilungen der Rotationssymmetrie kommen noch unsymmetrische Verteilungen hinzu. Dazu gehören die Gauß-Hermite- und Gauß-Laguerre-Moden. Eine kleine Übersicht dieser beiden Modenbilder in Abhängigkeit der Parameter m und n sowie p und l sind in **Tab. 3-3** bzw. **Tab. 3-4** zu finden.

Weiterhin ist es möglich die Laserquelle außerhalb der optischen Achse zu positionieren, was u.a. die Untersuchung des Einflusses von Dejustage und Abbildungsfehlern ermöglicht.



Tab. 3-3 Darstellung der Gauß-Hermite-Moden; $w_{0x} = w_{0y} = 20 \mu m$, $P = 10 W$



Tab. 3-4 Darstellung der Gauß-Laguerre-Moden; $w_0 = 20 \mu m$, $P = 10 W$

Oberflächengeometrie

Zur Auswahl stehen die gleichen Möglichkeiten wie bei Rotationssymmetrie, jedoch sind noch einige zusätzliche Funktionen enthalten. Jede Fläche ist beliebig dreh- und verschiebbar. Als Begrenzung steht ein Rechteck zur Verfügung und die Position der Begrenzung ist ebenfalls frei wählbar.

In der aktuellen Version sind horizontale (um die x-Achse) und vertikale (um die y-Achse) Drehungen ausführbar. Die Drehungen werden mit der jeweiligen Drehmatrix ausgeführt:

$$\begin{array}{l} \text{Drehmatrix für} \\ \text{Drehung um y-Achse} \end{array} \quad D = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (3-4)$$

$$\begin{array}{l} \text{Drehmatrix für} \\ \text{Drehung um x-Achse} \end{array} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (3-5)$$

Vor der Transformation muss die Fläche zunächst so verschoben werden, dass sich der Mittelpunkt der Fläche im Koordinatenursprung befindet. Die genaue Berechnungsmethode lautet:

$$\begin{array}{l} \text{Drehung um die} \\ \text{y-Achse} \end{array} \quad \begin{aligned} X' &= \cos \alpha \cdot (X - x_{\text{MitteBegr}}) + x_{\text{MitteBegr}} \\ &\quad + \sin \alpha \cdot (Z - z_i) \\ Z' &= -\sin \alpha \cdot (X - x_{\text{MitteBegr}}) + \cos \alpha \cdot (Z - z_i) + z_i \end{aligned} \quad (3-6)$$

$$\begin{array}{l} \text{Drehung um die} \\ \text{x-Achse} \end{array} \quad \begin{aligned} Y' &= \cos \beta \cdot (Y - y_{\text{MitteBegr}}) + y_{\text{MitteBegr}} \\ &\quad - \sin \beta \cdot (Z - z_i) \\ Z' &= \sin \beta \cdot (Y - y_{\text{MitteBegr}}) + \cos \beta \cdot (Z - z_i) + z_i \end{aligned} \quad (3-7)$$

Da eine Koordinatentransformation durchgeführt wird, bleibt die tatsächliche Größe der Fläche erhalten.

Neben den bereits in der Rotationssymmetrie vorhandenen Flächen sind bei dieser Variante auch Berechnungen an Amplitudengittern möglich. Dazu werden einzelne Streifen mit den jeweiligen Parametern für Gitterkonstante/Spaltdichte und Transmission/Stegbreite erzeugt. An Stellen, an denen sich ein Gittersteg befindet, wird die Feldstärke auf 0 gesetzt (siehe **Abb. 3-2**).

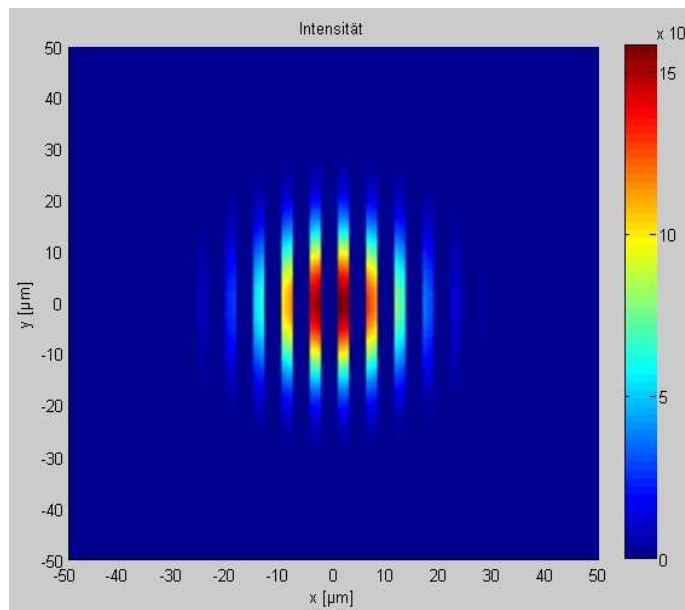


Abb. 3-2 Erzeugung der Intensitätsverteilung an einem Gitter; gewählte Größen: Gaußstrahl $w_{86} = 20 \mu m$, $P = 10 W$, Gitterkonstante $g = 5 \mu m$, $T_x = 40\%$, $T_y = 100\%$

Bei der Erzeugung der Gitterstruktur spielt die Elementgröße eine entscheidende Rolle. Ist diese zu groß gewählt, wird das Gitter mit großen Fehlern erzeugt. Daher wurde an dieser Stelle eine Funktion eingebaut, welche die Berechnung erst erlaubt, wenn die Stegbreite größer als die fünffache Elementgröße ist.

Elementgröße und Berechnungsmethode

Da bei dieser Berechnungsmethode keine Symmetrien mehr ausgenutzt werden, muss die elektrische Feldstärke für jedes Element der Zielfläche separat berechnet werden. Dies führt zu einer erheblich größeren Berechnungsdauer (siehe **4.3**). Die Berechnungsgrundlage und Sektorisierung sind analog der Rotationssymmetrie. Der unter 3.1 beschriebene Algorithmus muss für jedes Element der Zielfläche wiederholt werden. Ein Unterschied besteht in der Elementgröße, denn die Abstände in x- und y-Richtung müssen nicht mehr gleich groß sein.

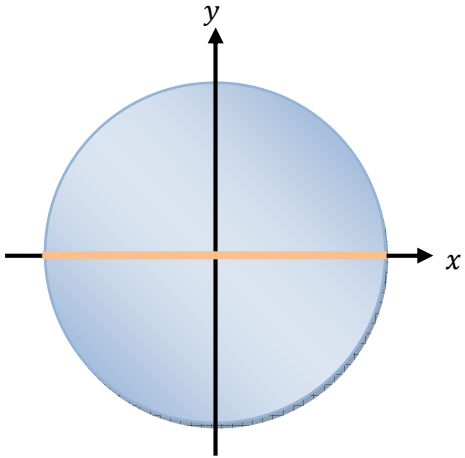
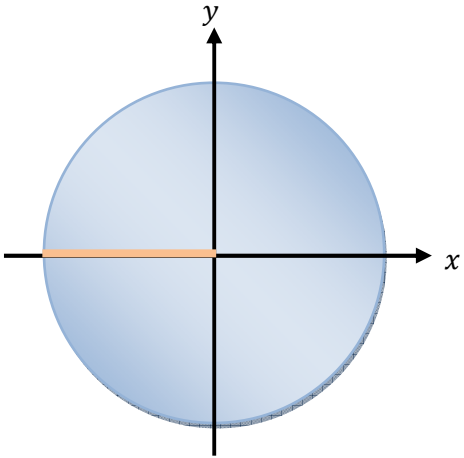
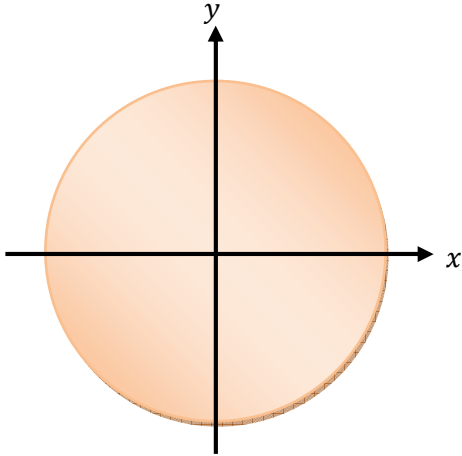
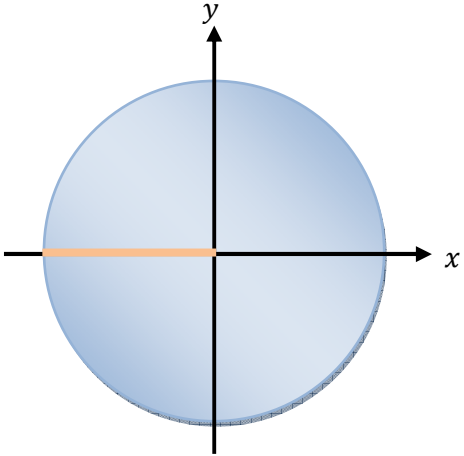
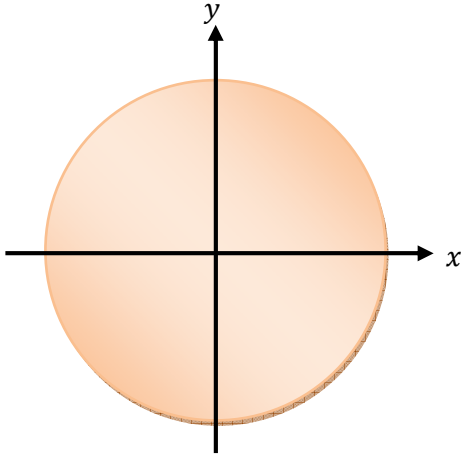
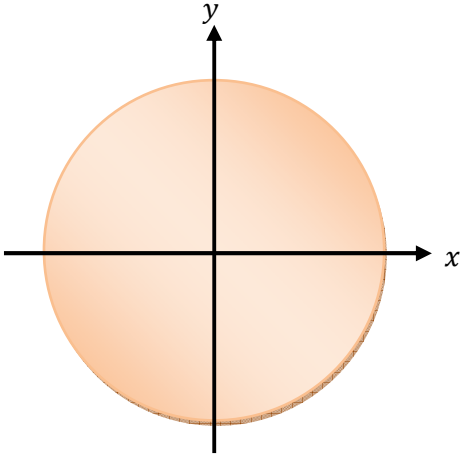
3.2.3 Zusammenfassung Berechnungsvarianten

Um den Unterschied zwischen den einzelnen Berechnungsvarianten noch einmal hervor zu heben, wurden diese in **Tab. 3-5** schematisch dargestellt. Zu sehen ist der Querschnitt des Strahlprofils. Orange Flächen bedeuten, dass sie in der Berechnung verwendet werden. Blaue Strukturen werden nicht benötigt.

Zu sehen ist, dass für die Linienabstrahlung die wenigsten Elemente benötigt werden. Die Matrizen sind demnach relativ klein und die Berechnung ist im Vergleich zu den anderen Berechnungsvarianten um mehrere Größenordnungen schneller.

Für Rotationssymmetrie: Flächenabstrahlung **3.2.1** müssen die Koordinaten sowie die elektrische Feldstärke für die komplette Abstrahlfläche vorliegen. Die Matrizen enthalten dadurch sehr viel mehr Elemente. Eine größere Elementanzahl bewirkt auch eine größere Berechnungszeit. Der Zusammenhang wird unter **4.3** dargestellt.

Liegt keine Rotationssymmetrie vor, muss die elektrische Feldstärke für jedes Element der Zielfläche berechnet werden. Die Anzahl der insgesamt verwendeten Elemente erhöht sich dadurch noch einmal deutlich.

Startfläche	Zielfläche
Rotationssymmetrie: Linienabstrahlung	
	
Rotationssymmetrie: Flächenabstrahlung	
	
Keine Rotationssymmetrie	
	

Tab. 3-5 Schematische Darstellung der verwendeten Geometrie, orange: genutzte Geometrie, blau: ungenutzte Geometrie

3.3 Strahlenoptische Abschätzung

Neben den wellenoptischen Gesetzen der Strahlausbreitung eignen sich die Gesetze der geometrischen Optik sehr gut um die einfache Strahlausbreitung (ohne Blenden und Phasensprünge) zu berechnen. Da in den meisten Fällen der Bediener keine Vorstellungen über die benötigte Ausdehnung der Grenzflächen und der zu erwartenden Ergebnisse hat, wurde ein Raytracing-Programm implementiert (siehe **Abb. 3-3**).

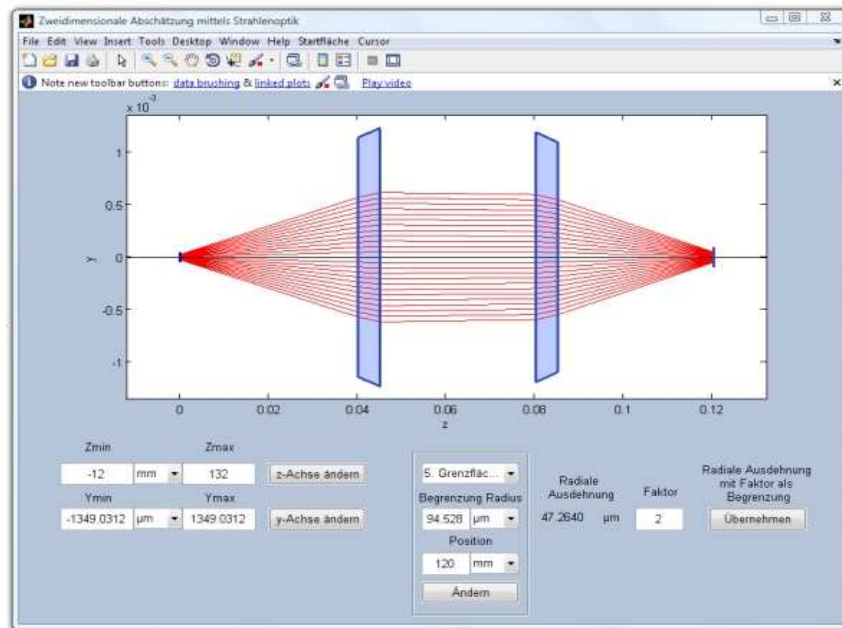


Abb. 3-3 Oberfläche zur Strahlenoptischen Abschätzung

Mithilfe dieser Implementierung ist es möglich den voraussichtlichen Strahlverlauf abzuschätzen. Die geometrischen Ausdehnungen auf den Zielflächen werden dem Benutzer ausgegeben und er kann diese auch direkt mit einem gewünschten Faktor für die weiteren Berechnungen übernehmen. Eine wellenoptische Berechnung ohne die Abschätzung ist wenig geeignet, denn durch eine blinde Berechnung kann es zu unerwünschten Beugungseffekten kommen. Sie können das Ergebnis stark verfälschen, wodurch eine Berechnung, die u.U. mehrere Stunden in Anspruch nehmen kann, nicht mehr zu verwenden ist.

Der Benutzer kann selbst entscheiden, ob er eine Anpassung an die Laserparameter wünscht oder eine Punktquelle verwenden möchte. Die gesamte Berechnung erfolgt mithilfe von Geradengleichungen, deren Normalform durch $y = m_S \cdot z + n_y$ gegeben ist. Der maximale Anstieg, bei Anpassung an die Laserparameter, ist gegeben durch:

$$m_S = \frac{\lambda}{\pi \cdot w_0} \quad (3-8)$$

Das absolute Glied ergibt sich aus dem Strahlradius $n_y = w_0$. Für eine Punktquelle wird der maximale Anstieg durch den vom Benutzer eingestellten Divergenzwinkel bestimmt. Das absolute Glied ist in diesem Fall 0.

An jeder Grenzfläche wird der genaue Schnittpunkt des Strahles mit der Grenzfläche ermittelt. Das ist möglich, da jede Grenzflächenform durch eine Funktion analytisch beschrieben werden kann. Anschließend wird der Anstieg der Tangente im ermittelten Schnittpunkt bestimmt und daraus der Anstieg der Flächennormalen. Mit diesen Größen kann das Brechungsgesetz in Vektorschreibweise (3-9) angewendet werden [Damm2009]. Die benötigten Größen wurden in **Abb. 3-4** dargestellt. Genaue Berechnungsvorschriften der jeweiligen Grenzflächen sind in der Dokumentation im Anhang unter **D 3.3** zu finden.

*Brechungsgesetz in
Vektorschreibweise*

$$\vec{r}'_S = k \cdot \frac{\vec{r}_T}{|\vec{r}_T|} \pm \sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{\vec{r}_N}{|\vec{r}_N|} \quad (3-9)$$

mit

$$k = \sin \varepsilon' = \frac{n}{n'} \cdot \sin \varepsilon = \frac{n}{n'} \cdot \frac{|\vec{r}_S \times \vec{r}_N|}{|\vec{r}_S| |\vec{r}_N|}$$

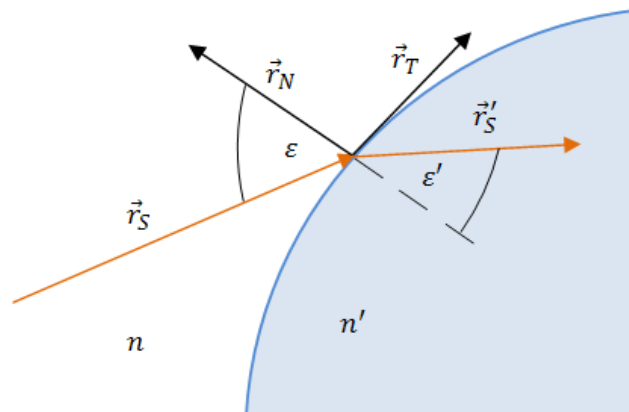


Abb. 3-4 Brechung an einer Grenzfläche, $n' > n$

3.4 Ausgabe der Berechnungsdaten

Am Ende jeder Berechnung öffnet sich ein separates Fenster, in dem die Berechnungsergebnisse dargestellt werden (siehe **Abb. 3-5**). Die Ausgabe der berechneten elektrischen Feldstärke, Intensität sowie der Phasenlage kann jeweils in 2D und 3D erfolgen.

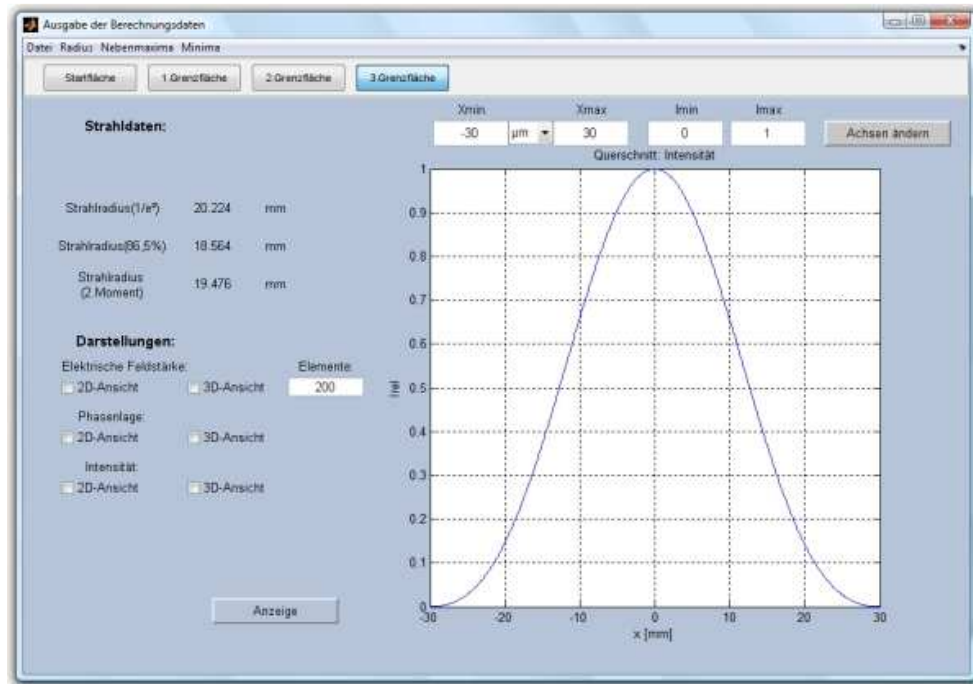


Abb. 3-5 Fenster für die Ausgabe der Berechnungsergebnisse

Je nach gewählter Berechnungsart, werden unterschiedliche Daten ausgegeben. Nur wenn als Abstrahlgeometrie Fläche gewählt wurde, ist es möglich die im Strahlprofil enthaltene Leitung durch numerische Integration von (3-10) bzw. (3-11) und Absolutwerte der maximalen Intensität zu erhalten. Anderenfalls ist nur eine Ausgabe der Relativwerte möglich. Die Ursache ist, dass bei der Abstrahlgeometrie Linie kein Flächenelement zur Multiplikation zur Verfügung steht.

Allgemeine Leistungsbestimmung

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(x, y, z) dx dy \quad (3-10)$$

Leistungsbestimmung für ein rotationssymmetrisches Strahlprofil

$$P = 2\pi \int_0^{+\infty} r \cdot I(r) dr \quad (3-11)$$

Weiterhin werden für Rotationssymmetrie drei verschiedene Strahlradien und für keine Rotationssymmetrie nur ein Radius ausgegeben. Zur Angabe des Strahlradius gibt es prinzipiell drei Möglichkeiten. Dazu gehören der Abfall der maximalen Intensität auf den $1/e^2$ -Anteil, eine Angabe der enthaltenen Leistung (Encircled Power) oder das 2. Moment der Intensitätsverteilung. Nach DIN ISO 11145-1:2008 [DIN2008] sollte durch einen Index u gekennzeichnet werden auf welcher Definition die Angabe des Strahlradius w_u basiert. Dabei ist entweder die enthaltene Leistung in Prozent als Index u , die Angabe des 2. Moments durch $u = \sigma$ oder die Angabe des $1/e^2$ ten Anteiles durch $u = 1/e^2$ zu wählen. Die Definition des Abfalls der maximalen Intensität auf den $1/e^2$ ten Anteil stammt aus der Definition des Strahlradius des Grundmodes. In diesem Punkt sind alle 3 Radien für den Grundmode gleich. Bei Moden höherer Ordnung oder enthaltenen Nebenmaxima, welche durch Beugungseffekte entstanden sind, erscheint diese Definition wenig sinnvoll. Die äußeren Anteile würden bei einer Angabe von $1/e^2$ vernachlässigt werden. Handelt es sich um ein rotationssymmetrisches Strahlprofil so ist die Angabe der enthaltenen Leistung sinnvoll. Vor allem wird die Angabe des Radius mit 86,5% enthaltener Leistung verwendet. Die Angabe des 2. Moments kann bei Rotationssymmetrie nach (2-46) erfolgen. Werden Berechnungen mit symmetrieverletzenden Elementen durchgeführt, ergibt sich häufig ein astigmatisches Strahlprofil. In solchen Fällen oder unter Verwendung Moden höherer Ordnung ist die Angabe des 2. Moments (3-13) sinnvoll. Dabei muss zunächst das 1. Moment (3-12) berechnet werden, welches den Schwerpunkt des Strahlprofils darstellt.

$$\begin{array}{ll} \text{1. Moment} & \bar{x} = \frac{\iint x \cdot I(x, y, z) dx dy}{\iint I(x, y, z) dx dy} \end{array} \quad (3-12)$$

$$\begin{array}{ll} \text{2. Moment} & \sigma_x^2 = \frac{\iint (x - \bar{x})^2 \cdot I(x, y, z) dx dy}{\iint I(x, y, z) dx dy} \end{array} \quad (3-13)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Strahlradius} & w_{\sigma x} = 2\sqrt{\sigma_x^2} \end{array}$$

Für rotationssymmetrische Berechnungen erfolgt die Angabe aller 3 Radiusdefinitionen. Der Benutzer kann dann selbstständig entscheiden welche Angabe für das konkrete Problem sinnvoll ist. Bei keiner Rotationssymmetrie wird hingegen nur das 2. Moment ausgegeben.

Zur Ermittlung des Radius auf der Basis $1/e^2$ wird mithilfe der berechneten Intensitätswerte eine Splinefunktion erstellt. Da in MATLAB lediglich die Berechnung von Funktionswerten einer Splinefunktion möglich ist, muss der Spline als Umkehrfunktion erstellt werden. Somit wird als Argument der Abfall der maximalen Intensität auf den $1/e^2$ -Anteil vorgegeben und der

Funktionswert dieses Wertes berechnet. Dieser Funktionswert entspricht dem gesuchten Radius. Das schematische Prinzip dazu ist in **Abb. 3-6** dargestellt.

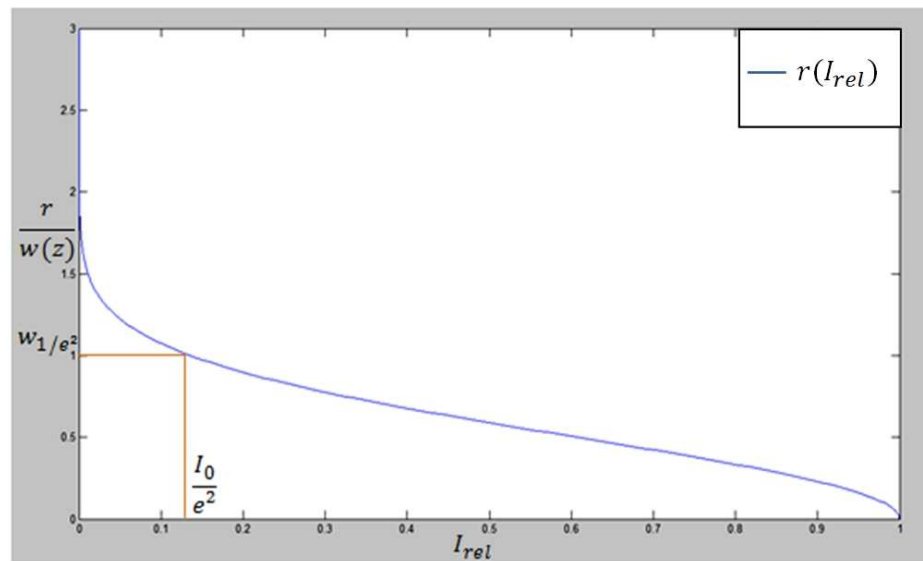


Abb. 3-6 Schematische Darstellung der Berechnung des Strahlradius mit $1/e^2$, blau: Spline der Umkehrfunktion, orange: Vorgabe des $1/e^2$ ten Anteils der maximalen Intensität und dazugehöriger Funktionswert

Der Radius auf der Basis von 86,5% Leistungseinschluss wird etwas aufwendiger ermittelt. Zunächst wird für jedes im Strahlprofil enthaltene Ringelement (vgl. **Abb. 3-7**) die dazugehörige Leistung bestimmt. Dies geschieht durch numerische Umsetzung von (3-11) ohne Integration. Der Verlauf der Leistungen der einzelnen Ringelemente in Abhängigkeit des Radius ist in **Abb. 3-8** dargestellt.

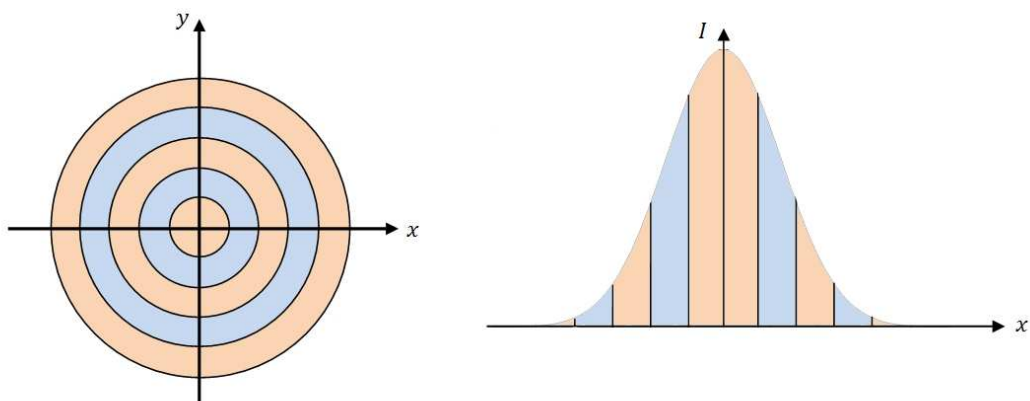


Abb. 3-7 Schematische Darstellung der Ringelemente

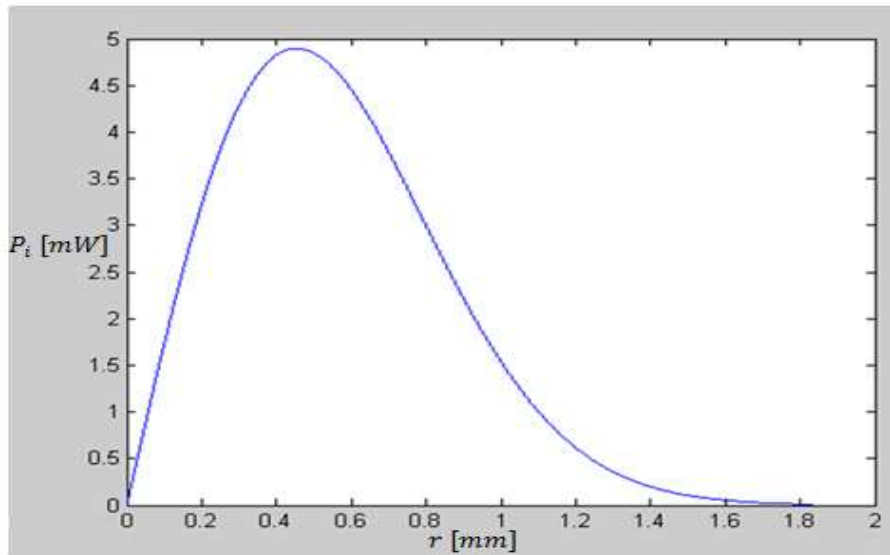


Abb. 3-8 Darstellung der Abhängigkeit der Einzelleistungen vom Radius
gewählte Größen: Gaußstrahl, $w_{86} = 20 \mu m$, $P = 10 W$, $z_l = 40 mm$, $R_{aperture} = 1,836 mm$

Um den Radius zu erhalten, an welcher Stelle 86,5% der Gesamtleistung enthalten ist, müssen diese Einzelleistungen der Ringelemente jeweils bis zu dem dazugehörigen Radius aufsummiert werden. Dazu eignet sich sehr gut die Multiplikation mit einer unteren Dreiecksmatrix, welche nur Einsen enthält. Beispielhaft wurde dies im nachfolgenden Beispiel dargestellt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_1 + P_2 \\ P_1 + P_2 + P_3 \\ P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \\ P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 \\ P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 \end{pmatrix}$$

Allgemein besitzt der Vektor \vec{P} die Dimension $(1, nx)$ und muss vor der Multiplikation transponiert werden. Die untere Diagonalmatrix muss die Dimension (nx, nx) besitzen. Da bei großen Ausdehnungen die Matrizen einen großen Speicherplatz benötigen, ist auch hier eine Sektorisierung notwendig. Das Ergebnis ist ein Vektor der Dimension $(nx, 1)$, welcher die aufsummierten Einzelleistungen enthält.

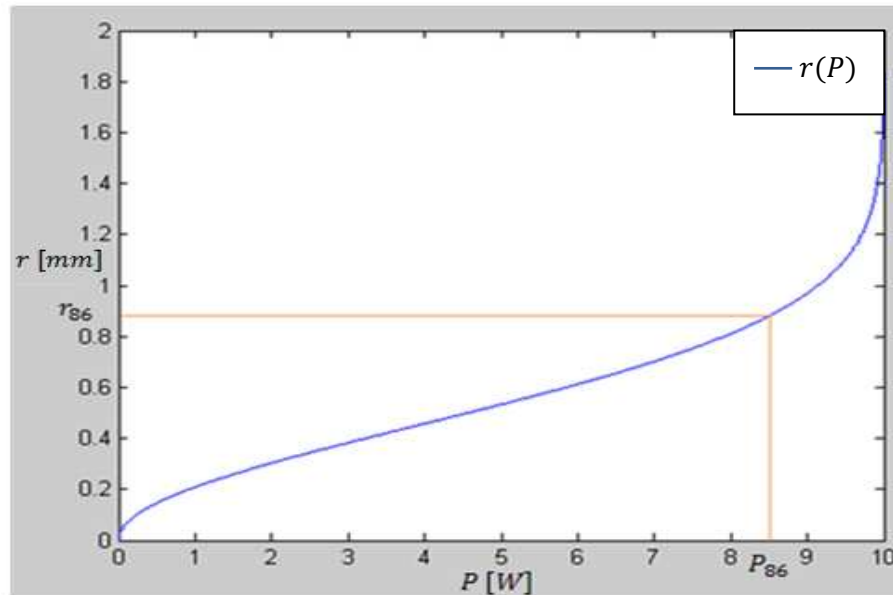


Abb. 3-9 Darstellung der aufsummierten Einzelleistungen als Umkehrfunktion
gewählte Größen: Gaußstrahl, $w_{86} = 20 \mu m$, $P = 10 W$, $z_1 = 40 mm$, $R_{aperture} = 1,836 mm$

Zur Berechnung des Radius ist es wieder notwendig die Umkehrfunktion $r(P)$ in Form eines Splines zu erstellen und durch Vorgabe von 86,5% Leistung den Radius als Funktionswert zu berechnen (siehe **Abb. 3-9**). Im Vorfeld musste die insgesamt enthaltene Leistung bestimmt werden.

4 Simulationen und Untersuchungen

In diesem Kapitel wird der Einfluss der Elementgröße auf das Berechnungsergebnis untersucht. Dafür wurden der Einfluss der Strahlausdehnung und die Entfernung von Abstrahl- und Zielfläche in Zusammenhang mit der sich damit ergebenden maximalen Elementgröße geprüft. Weiterhin wurde auch der Neigungsfaktor untersucht, der sich aus den theoretischen Betrachtungen ergab. Da die Elementgröße entscheidende Rolle in Bezug auf die Berechnungszeit spielt, wurde ihr Einfluss im Zusammenhang mit der Gesamtelementanzahl auf die Berechnungszeit analysiert und charakterisiert.

4.1 Variation der Elementgröße

Für die folgenden Untersuchungen wird die Elementgröße auf der Startfläche verändert. Alle weiteren Parameter werden konstant gehalten. Zum Vergleich wird der theoretische Strahlradius heran gezogen. Dieser berechnet sich nach (2-30), falls sich die Strahltaile im Ursprung befindet. Diese Rechnungen wurden für die Abstrahlgeometrie Linie und Fläche durchgeführt. Die verwendeten Parameter sind in **Tab. 4-1** zusammen gefasst. Um die Berechnungsergebnisse vergleichen zu können, wurde die Elementgröße der Abstrahlfläche auf die verwendete Wellenlänge normiert und wird fortan als s_λ bezeichnet.

Laserparameter	Parameter der Startfläche	Parameter der Grenzfläche	Theoretischer Strahlradius
$\lambda = 1064 \text{ nm}$ $P = 10 \text{ W}$ Gaußstrahl $w_{86} = 30 \text{ }\mu\text{m}$	Geometrie: Ebene $z_0 = 0$ Begrenzung: Kreis $R_{\text{aperture}} = 75 \text{ }\mu\text{m}$ Elementgröße: $0,25\lambda \dots 30\lambda$ Brechzahl: $n = 1$	Geometrie: Ebene $z_1 = 20 \text{ mm}$ Begrenzung: Kreis $R_{\text{aperture}} = 512 \text{ }\mu\text{m}$ Elementgröße: 2λ Brechzahl: $n = 1$	$w(z) = 227,77 \text{ mm}$

Tab. 4-1 Parameter zur Untersuchung des Einflusses der Elementgröße auf der Abstrahlfläche

Die relativen Abweichungen der berechneten Strahlradien werden wie folgt ermittelt:

$$\Delta w_{rel} = \left(\frac{w_{ber}(z)}{w_{theo}(z)} - 1 \right) \cdot 100\% \quad (4-1)$$

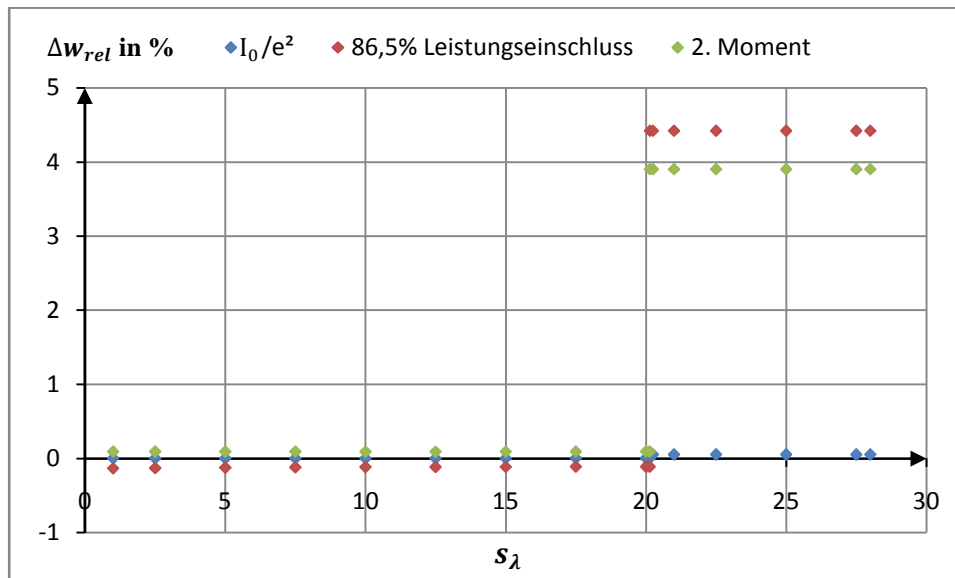


Abb. 4-1 Grafische Darstellung der ermittelten relativen Abweichungen des Strahlradius vom theoretischen Wert in Abhängigkeit von der Elementgröße

Die Berechnungen ergaben, dass bis zu einer Elementgröße von $20,13\lambda$, bei den gewählten Größen, die berechneten Werte sehr gut mit dem theoretischen Wert übereinstimmen (siehe **Abb. 4-1**). Die mittels 2. Moment berechneten Werte werden generell etwas zu groß berechnet und die Werte für 86,5% Leistungseinschluss etwas zu klein. Die Abweichungen liegen unter 1%. Die berechneten Radien für I_0/e^2 stimmen bis auf wenige Tausendstel mit den theoretischen Werten überein. Alle drei Methoden der Radiusermittlung haben sich als geeignet erwiesen.

Ab einer Elementgröße von $20,13\lambda$ erfolgt ein sprunghafter Anstieg in allen 3 Radien. Die Ursache ist, dass an den Außenrändern Nebenmaxima erscheinen. Da die Methoden des 2. Moments und 86,5% Leistungseinschluss die äußeren Anteile berücksichtigen, vergrößern sich die damit ermittelten Radien am meisten. Ab einer Elementgröße von $28,2\lambda$ erfolgt ein erneuter sprunghafter Anstieg. Die Nebenmaxima rücken an das Hauptmaximum heran, wodurch sich alle Radien stark vergrößern. Jeweils ein repräsentatives Berechnungsergebnis jedes Bereiches ist in **Abb. 4-2** dargestellt. Die Darstellungen zeigen das erhaltene Strahlprofil mit den Nebenmaxima.

Die gleichen Berechnungen wurden für die Abstrahlgeometrie Fläche durchgeführt. Die berechneten Radien unterscheiden sich nur geringfügig von den berechneten Radien durch

Linienabstrahlung. Da für eine Berechnung mittels Linienabstrahlung eine sehr viel kürzere Berechnungszeit benötigt wird, wurden die weiteren Betrachtungen ausschließlich für Linienabstrahlung durchgeführt.

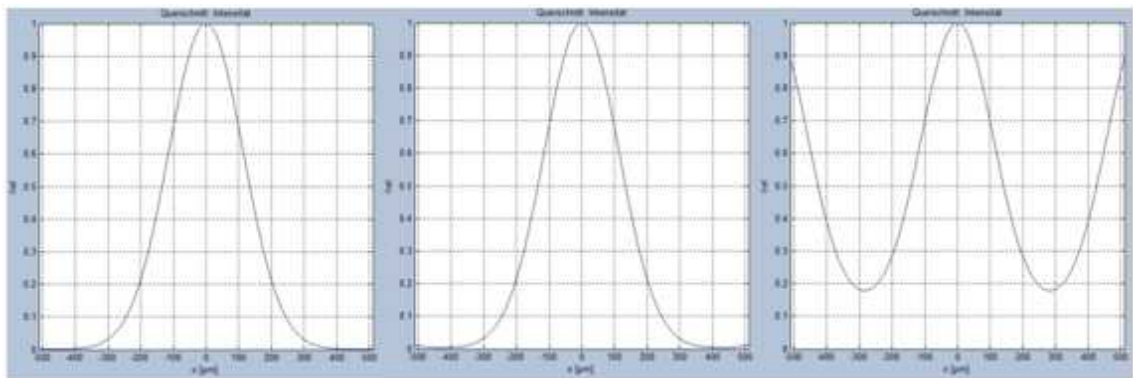


Abb. 4-2 Darstellung der erhaltenen Strahlprofile; links: regulärer Gaußstrahl; Mitte: Gaußstrahl mit kleinen Nebenmaxima; rechts: Gaußstrahl mit großen Nebenmaxima

Durch Vergrößerung der Ausdehnung des Zielegebiets ergibt sich, dass die Nebenmaxima immer entstehen sobald die Größe der Elemente die einfache Wellenlänge übersteigt. Diese Eigenschaft gilt für das Fernfeld. Der Einfluss der Elementgröße im Nahfeld wird unter 4.2 weiter untersucht. Um den Einfluss der Elementgröße auf die Lage der Nebenmaxima heraus zu finden, wurden weitere Untersuchungen durchgeführt. Die verwendeten Parameter sind in **Tab. 4-2** dargestellt. Die Lage des 1. Nebenmaximums wird fortan als x_{1NM} bezeichnet.

Laserparameter	Parameter der Startfläche	Parameter der Grenzfläche
$\lambda_1 = 1064 \text{ nm}$ $\lambda_2 = 532 \text{ nm}$ $P = 10 \text{ W}$ Gaußstrahl $w_{86} = 30 \text{ } \mu\text{m} \dots 2 \text{ mm}$	Geometrie: Ebene $z_0 = 0$ Begrenzung: Kreis $R_{aperture} = 2,5 \cdot w_{86}$ Elementgröße: $\lambda \dots 33\lambda$ Brechzahl: $n = 1$	Geometrie: Ebene $z_1 = 20 \text{ mm}$ Begrenzung: Kreis $R_{aperture} = 20 \text{ mm}$ Elementgröße: 2λ Brechzahl: $n = 1$

Tab. 4-2 Parameter zur Untersuchung des Einflusses der Elementgröße auf der Abstrahlfläche auf die Lage des 1. Nebenmaximums

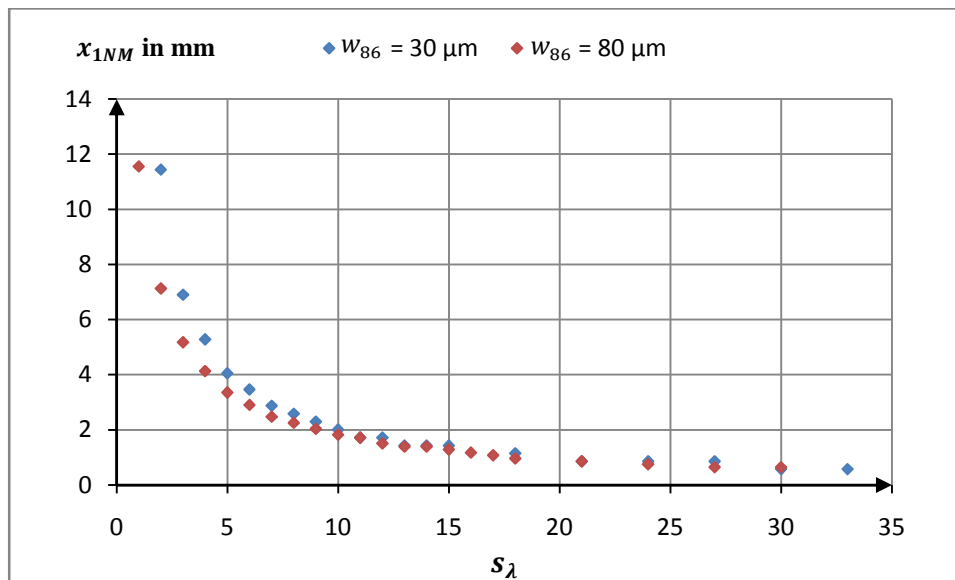


Abb. 4-3 Darstellung der Abhängigkeit der Lage des 1. Nebenmaximums von der Elementgröße

Die Berechnungen ergaben, dass durch Vergrößerung der Elementgröße die Lage des 1. Nebenmaximums immer weiter an das Hauptmaximum heran rückt. Der grafische Verlauf der Abhängigkeit der Lagen des 1. Hauptmaximums ist in **Abb. 4-3** dargestellt. Weiterhin erhöht sich mit steigender Elementgröße die Anzahl der Nebenmaxima. Für größere Radien gab es keine signifikanten Änderungen zu $80 \mu m$. Daher wurden weitere Graphen mit größeren Strahlradien in der Darstellung nicht eingezeichnet. Mit zunehmendem Tailenradius, bei gleicher Elementgröße, treten neben den eigentlich nicht vorhandenen Nebenmaxima weitere Schwingungen, Schwankungen und Rauschen auf. Bei großen Tailenradien ist die eigentliche Strahlform nicht mehr erkennbar (siehe **Abb. 4-4** (c)). Das Rauschen dominiert das Ergebnis.

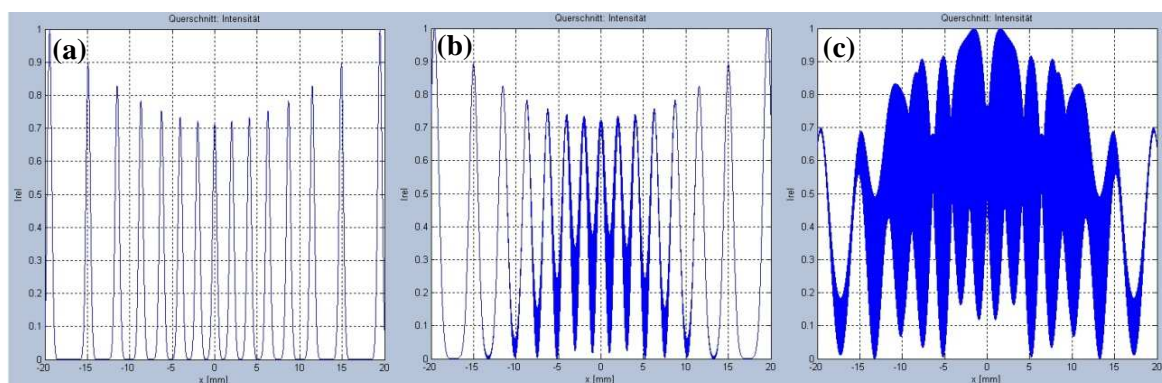


Abb. 4-4 Darstellung der erhaltenen Intensitätsverteilung für verschiedene Tailenradien

(a) $w_{86} = 500 \mu m$; (b) $w_{86} = 1 mm$; (c) $w_{86} = 2 mm$; Elementgröße 10λ

Die Berechnungen wurden für eine zweite Wellenlänge von 532 nm durchgeführt. Die Ergebnisse gleichen sich dabei. Dies bedeutet, dass nur eine Abhängigkeit der Elementgröße von einem Vielfachen der Wellenlänge existiert und nicht von der gewählten Wellenlänge selbst.

Aus den erhaltenen Berechnungsergebnissen lässt sich schließen, dass es besonders bei großen Ausdehnungen notwendig ist eine kleine Elementgröße zu wählen, damit im gewählten Ausschnitt keine Nebenmaxima auftreten. Bei kleineren Strahlradien führt auch eine große Elementgröße der Elemente der Abstrahlfläche zu einem Berechnungsergebnis ohne enthaltene Nebenmaxima.

Weiterhin wurden Berechnungen für eine sphärische Krümmung der Startfläche von $R = -1 \text{ mm}$ durchgeführt. Dabei konnte kein Unterschied in der Lage der Nebenmaxima festgestellt werden. Die Ergebnisse weisen ein größeres Rauschen auf, was deutlich in **Abb. 4-5** zu sehen ist. Die Ursache ist, dass die Begrenzungsfläche auf eine Kugeloberfläche projiziert wird. Aufgrund der Krümmung der Oberfläche wird bei der Projektion die Elementgröße auf den äußeren Gebieten größer als auf den inneren. Das schematische zweidimensionale Prinzip ist in **Abb. 4-6** dargestellt. Die Folge sind Ungenauigkeiten in der Berechnung durch eine größere Elementgröße als gewählt.

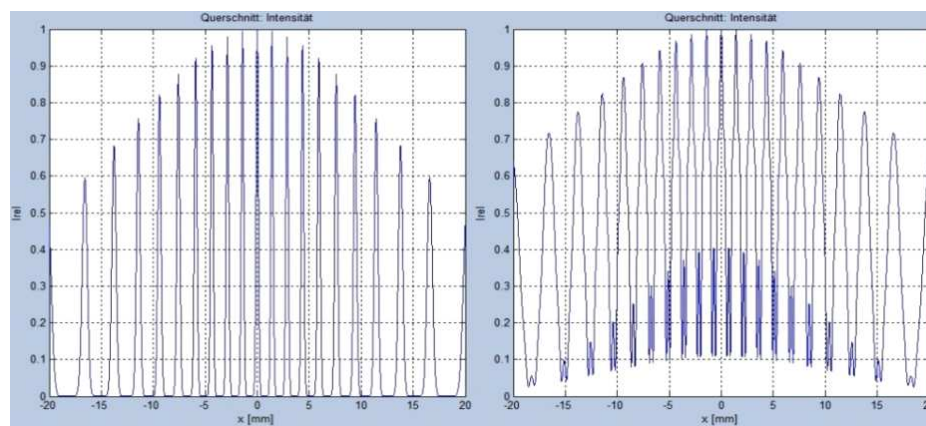


Abb. 4-5 Darstellung der erhaltenen Intensitätsverteilung für links: Ebene; rechts: Kugel; $w_{86} = 30 \mu\text{m}$; Elementgröße 15λ

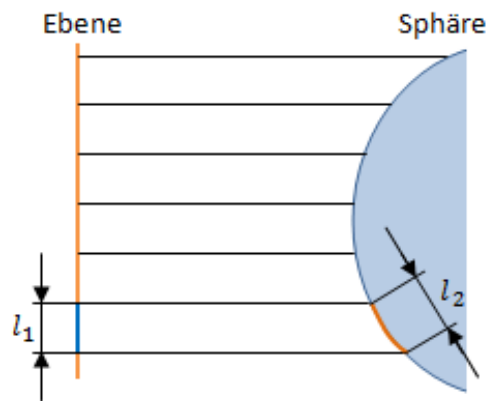


Abb. 4-6 Zweidimensionale Darstellung der Projektion einer ebenen Fläche auf eine Kugelfläche, l_1 -tatsächliche Elementgröße, l_2 -projizierte Elementgröße, $l_2 > l_1$

Untersuchungen ergaben, dass ab einer Begrenzung $R_{aperture}$ der Startfläche von etwa $2,5 \cdot w_{86}$ die Größe der Begrenzung keinen weiteren Einfluss auf das Berechnungsergebnis ausübt. Nur die Größe der Strahlausdehnung selbst hat einen Einfluss auf die maximal mögliche Elementgröße. Von Bedeutung ist die Kenntnis bis zu welcher Elementgröße bei einem gegebenen Radius, die Berechnungen noch genaue Ergebnisse liefern. Dazu wurden weitere Tests mit den in **Tab. 4-3** dargestellten Parametern durchgeführt. In diesen Messungen wurde die maximale Elementgröße ohne enthaltenes Rauschen im berechneten Strahlprofil ermittelt.

Laserparameter	Parameter der Startfläche	Parameter der Grenzfläche
$\lambda = 1064 \text{ nm}$ $P = 10 \text{ W}$ Gaußstrahl $w_{86} = 100 \dots 1000 \text{ }\mu\text{m}$	Geometrie: Ebene $z_0 = 0$ Begrenzung: Kreis $R_{aperture} = 2,5 w_{86}$ Elementgröße: $\lambda \dots 40\lambda$ Brechzahl: $n = 1$	Geometrie: Ebene $z_1 = 1 \dots 25 \text{ mm}$ Begrenzung: Kreis $R_{aperture} =$ $2 \cdot \text{Strahlenopt.}$ Abschätzung Elementgröße: 2λ Brechzahl: $n = 1$

Tab. 4-3 Parameter zur Untersuchung der maximalen Elementgröße für eine vorgegebene Ausdehnung

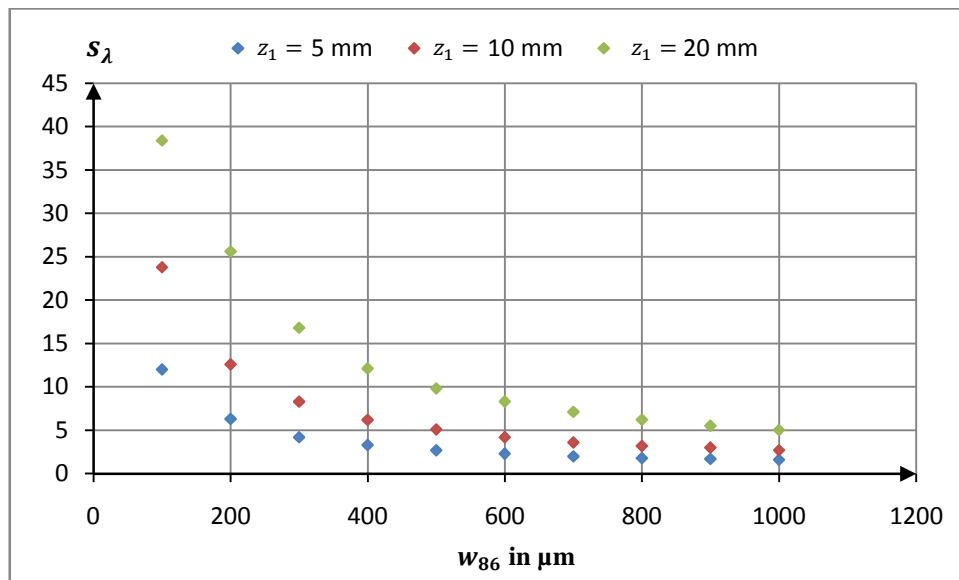


Abb. 4-7 Darstellung der Abhängigkeit der maximalen Elementgröße vom Strahlradius für verschiedene Entfernungen der Zielfläche

Als Ergebnis stellte sich heraus, dass die maximal mögliche Elementgröße zum einen vom verwendeten Strahlradius und zum anderen von der Entfernung der Zielfläche zur Abstrahlfläche abhängig ist.

Die Abhängigkeit der maximalen Elementgröße vom Strahlradius weist einen hyperbelförmigen Verlauf auf (siehe **Abb. 4-7**). Das bedeutet, dass bei kleinen Ausdehnungen eine größere Elementgröße gewählt werden kann als bei großen Ausdehnungen. Durch Bildung des reziproken Strahlradius und Darstellung der Abhängigkeit der Elementgröße vom reziproken Strahlradius (**Abb. 4-8**), ergab sich für alle drei Entfernungen ein annähernd linearer Verlauf. Daraus lässt sich schließen, dass indirekte Proportionalität zwischen maximal wählbarer Elementgröße und Strahlradius vorliegt.

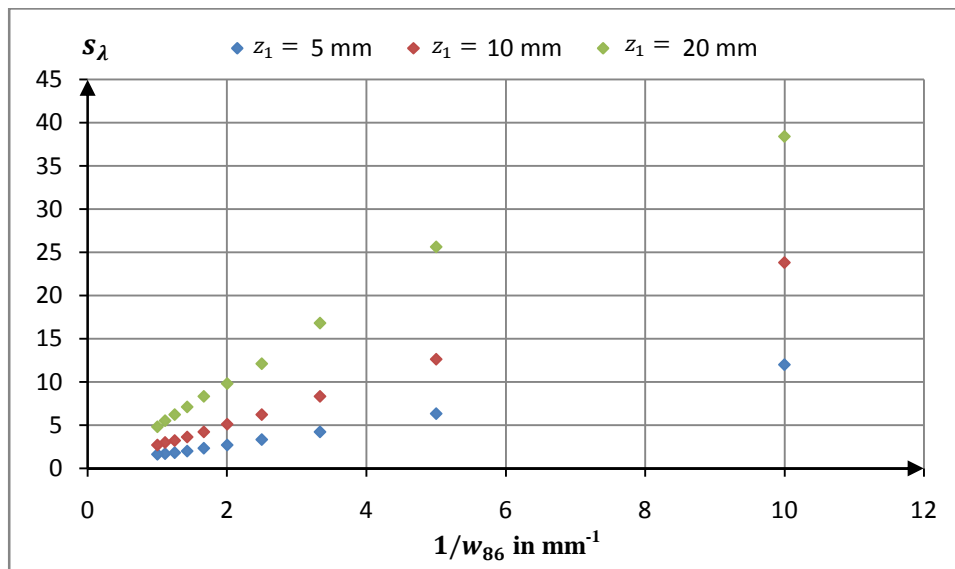


Abb. 4-8 Darstellung der Abhängigkeit der maximalen Elementgröße vom reziproken Strahlradius bei verschiedenen Entfernungen der Zielfläche

Bereits in **Abb. 4-7** und **Abb. 4-8** ist deutlich zu sehen, dass der Abstand von Start- und Zielfläche einen großen Einfluss besitzt. Je weiter die Zielfläche von der Startfläche entfernt ist, desto größer kann die Elementgröße gewählt werden. Um diese Abhängigkeit weiter zu konkretisieren, wurden Untersuchungen für drei verschiedene Strahlradien mit unterschiedlichen Positionen der Zielfläche durchgeführt. Die Ergebnisse sind in **Abb. 4-9** dargestellt. Alle Graphen weisen einen linearen Zusammenhang zwischen Abstand und maximaler Elementgröße auf. Die maximale Elementgröße ist demzufolge dem Abstand Abstrahl- zu Zielfläche direkt proportional. Das bedeutet, dass bei einem großen Abstand der Flächen auch eine größere Elementgröße genutzt werden kann.

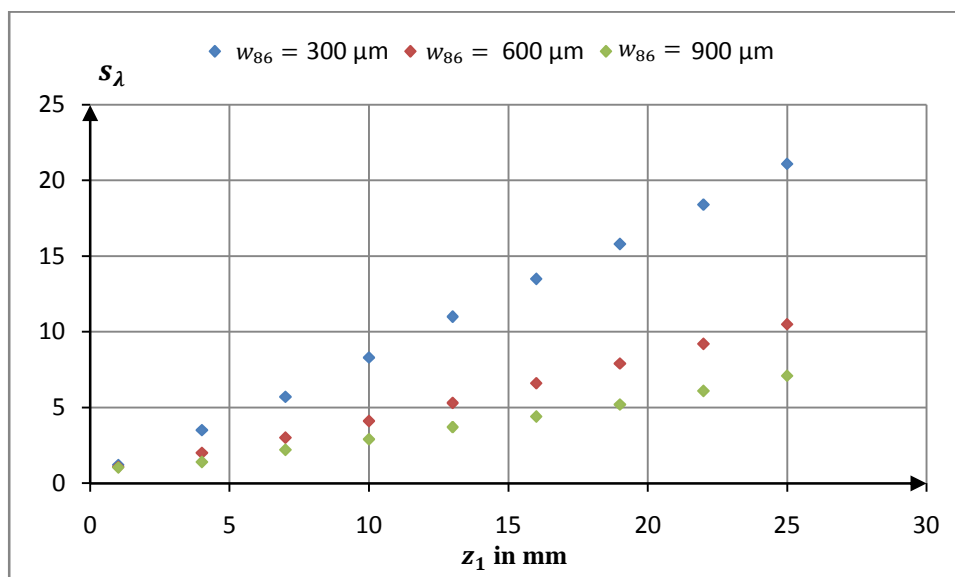


Abb. 4-9 Darstellung der Abhängigkeit der maximalen Elementgröße vom Abstand von Start- und Zielfläche

Mithilfe der ermittelten Zusammenhänge lässt sich eine Funktion erstellen mit welcher die maximale Elementgröße vor der Berechnung abgeschätzt werden kann. Da zwischen der Elementgröße und dem Abstand direkte Proportionalität und zwischen der Elementgröße und dem Strahlradius indirekte Proportionalität vorliegt, gilt: $s_\lambda = C \frac{z_1}{w_{86}}$. Für den genauen Zusammenhang wird ein Proportionalitätsfaktor C benötigt. Dieser wurde aus den gewonnenen Daten mittels Mittelwertbildung erstellt. Der endgültige Zusammenhang lautet damit:

$$s_\lambda = 0,2553 \cdot \frac{\Delta z}{w_{86}} \quad (4-2)$$

Überprüfungssimulationen haben ergeben, dass diese Formel mit Einschränkungen verwendet werden kann. Für große Entfernungen ist die tatsächliche maximale Elementgröße etwas kleiner als die berechnete. Für kleine Entfernungen ist die tatsächliche maximale Elementgröße etwas größer als die berechnete. Um diese beiden Fälle auszugleichen wurde die Formel etwas modifiziert, sodass stets auf ganzzahlige Vielfache der Wellenlänge abgerundet wird. Falls die berechnete Elementgröße kleiner als 1λ ist, wird diese auf 1λ gesetzt.

(4-2) wurde unter der Bedingung erstellt, dass die Elementgröße auf der Zielfläche 2λ beträgt. Wird die Elementgröße auf Zielfläche variiert, ergeben sich Abweichungen. Für deren Charakterisierung wurden weitere Simulationen mit den in **Tab. 4-4** dargestellten Parametern durchgeführt.

Laserparameter	Parameter der Startfläche	Parameter der Grenzfläche
$\lambda = 1000 \text{ nm}$ $P = 10 \text{ W}$ Gaußstrahl $w_{86} = 550 \dots 1200 \text{ }\mu\text{m}$	Geometrie: Ebene $z_0 = 0$ Begrenzung: Kreis $R_{aperture} = 2,5 w_{86}$ Elementgröße: $2,2\lambda \dots 4,8\lambda$ Brechzahl: $n = 1$	Geometrie: Ebene $z_1 = 10 \text{ mm}$ Begrenzung: Kreis $R_{aperture} =$ $2 \cdot \text{Strahlenopt.}$ <i>Abschätzung</i> Elementgröße: $1\lambda \dots 24\lambda$ Brechzahl: $n = 1$

Tab. 4-4 Parameter zur Untersuchung des Einflusses der Elementgröße auf der Zielfläche auf das Berechnungsergebnis

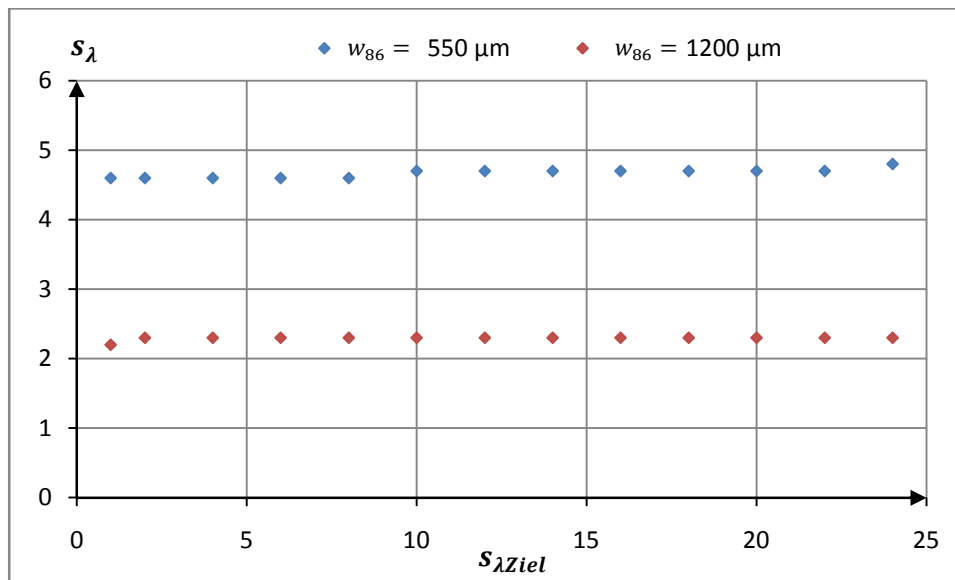


Abb. 4-10 Darstellung der Abhängigkeit der maximalen Elementgröße der Abstrahlfläche in Abhängigkeit von der Elementgröße der Zielfläche für zwei verschiedene Strahlabmessungen

Anhand des Graphen in **Abb. 4-10** wird deutlich, dass die Elementgröße auf der Zielfläche nur einen sehr geringen Einfluss auf die maximal mögliche Elementgröße auf der Abstrahlfläche besitzt. Mit zunehmender Elementgröße auf der Zielfläche kann die Elementgröße der Abstrahlfläche nur wenig gesteigert werden. Der Einfluss kann somit in der Berechnungsformel der maximalen Elementgröße der Abstrahlfläche vernachlässigt werden.

Die Elementgröße der Abstrahlfläche beeinflusst die Berechnungsdauer. Je größer die Elementgröße, desto kleiner wird die Berechnungsdauer. Dieser Zusammenhang wird unter **4.3** noch genauer untersucht werden. Um Rechenzeit zu sparen ist es möglich die Elementgröße der Zielfläche zu verringern. Jedoch sollte beachtet werden, dass damit auch die Genauigkeit des Berechnungsergebnisses sinkt. Um diesen Zusammenhang zu verdeutlichen, wurden die relativen Abweichungen von berechneten zu theoretischen Werten für die in **Tab. 4-4** dargestellten Parametern nach (4-1) berechnet. Als berechneter Strahlradius wurde der mittels 2. Moment bestimmte Radius ausgewählt, da mit dieser Berechnungsmethode eine Abweichung vom idealen Strahlprofil (Gaußverteilung) besonders deutlich zu sehen ist. Der theoretische Radius wurde mit (2-30) ermittelt. Die Ergebnisse sind in **Abb. 4-11** dargestellt.

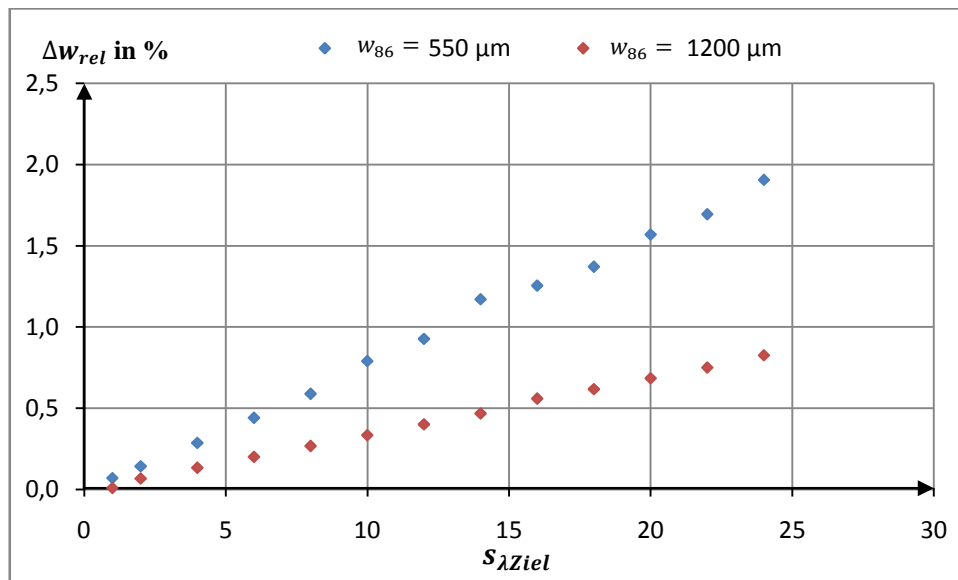


Abb. 4-11 Darstellung der Abhängigkeit der relativen Abweichung zwischen berechneten und theoretischen Strahlradius in Abhängigkeit von der Elementgröße der Zielfläche für zwei verschiedene Strahlabmessungen

Die Berechnungen haben ergeben, dass die relative Abweichung zwischen Berechnung und Theorie annähernd linear mit zunehmender Elementgröße auf der Zielfläche ansteigt. Weiterhin ist deutlich zu sehen, dass die relativen Abweichungen für kleine Strahlabmessungen größer sind als für große Strahlabmessungen. Aufgrund der größeren Strahlausdehnung wird die relative Elementgröße (Elementgröße dividiert durch Strahlabmessung) klein. Eine Vergrößerung der Elementgröße für eine große Strahlausdehnung hat demnach weniger Gewicht als eine Vergrößerung für eine kleine Abmessung. Eine relative Elementgröße von 1% bewirkt in etwa einen Fehler von 1%.

4.2 Der Neigungsfaktor

Der Neigungsfaktor beschreibt die Winkelabhängigkeit der Abstrahlung der Elementarwellen.

$$N = \frac{1}{2} (\cos(\vec{n}_0, \vec{e}_r) - \cos(\vec{n}_0, \vec{k}))$$

In diesem Zusammenhang ist der Winkel zwischen Kreiswellenvektor, d.h. Wellennormale und Flächennormale der Abstrahlfläche von Bedeutung. Da in der bisherigen Programmversion nur auf der Startfläche die Richtung der Wellennormale eindeutig bestimmt ist, können die Berechnungen zunächst nur für die Startfläche auf eine Grenzfläche durchgeführt werden. Die Richtung der Wellennormale auf der Startfläche ist antiparallel zur Flächennormalen. Der Term

$\cos(\vec{n}_0, \vec{k})$ nimmt den Wert -1 an. Der Winkel zwischen Flächennormale und der Verbindungslinie Abstrahlpunkt-Zielpunkt muss berechnet werden. Für diesen Winkel gilt:

$$\cos(\vec{n}_0, \vec{e}_r) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{r}|} \quad (4-3)$$

Zur Vereinfachung werden die Berechnungen für eine ebene und eine sphärische Abstrahlfläche ohne Drehungen und Verschiebungen vorgenommen.

$$\begin{array}{l} \text{Normalenvektor} \\ \text{Ebene} \end{array} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (4-4)$$

$$\begin{array}{l} \text{Normalenvektor} \\ \text{Sphäre} \end{array} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sgn}(R_0) \cdot X_0 \\ \text{sgn}(R_0) \cdot Y_0 \\ \text{sgn}(R_0) \cdot (Z_0 - (z_0 + R_0)) \end{pmatrix} \quad (4-5)$$

$$\begin{array}{l} \text{Abstandsvektor} \end{array} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 - x_1 \\ Y_0 - y_1 \\ Z_0 - z_1 \end{pmatrix} \quad (4-6)$$

Zur Überprüfung wurden Berechnungen mit den in **Tab. 4-5** dargestellten Parametern durchgeführt. Variiert wurden dabei die Tailenradien und die Entfernung der Grenzfläche. Bestimmt wurde die relative Abweichung zwischen berechneter Feldstärke mit und ohne Neigungsfaktor. Mathematisch bedeutet dies:

$$\Delta E_{rel} = \left(\frac{E_{mit}}{E_{ohne}} - 1 \right) \cdot 100\% \quad (4-7)$$

Laserparameter	Parameter der Startfläche	Parameter der Grenzfläche
$\lambda = 1064 \text{ nm}$ $P = 10 \text{ W}$ Gaußstrahl $w_{86} = 30 \text{ } \mu\text{m bis } 3 \text{ mm}$	Geometrie: Ebene $z_0 = 0$ Begrenzung: Kreis $R_{aperture} = 2,5 \cdot w_{86}$ Elementgröße: $0,5\lambda, 1\lambda$ Brechzahl: $n = 1$	Geometrie: Ebene $z_1 = 50 \text{ } \mu\text{m bis } 1 \text{ mm}$ Begrenzung: Kreis $R_{aperture}$ $= 2 \cdot \text{Strahlenopt.}$ Abschätzung Elementgröße: 1λ Brechzahl: $n = 1$

Tab. 4-5 Parameter zur Untersuchung des Einflusses des Neigungsfaktors

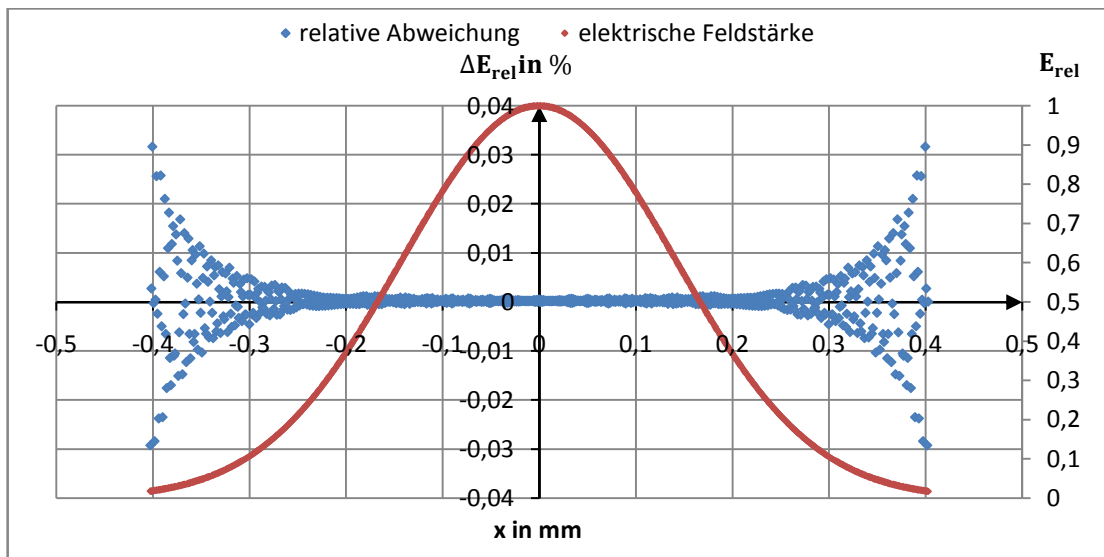


Abb. 4-12 Darstellung der Abhängigkeit der relativen Abweichung (blau) von x; zum Vergleich der Verlauf der elektrischen Feldstärke (rot); gewählte Größen: $w_{86} = 200 \mu m$, $z_1 = 800 \mu m$, Elementgröße 1λ

Die Berechnungen ergaben, dass der Neigungsfaktor nur bei kurzen Abständen von Abstrahl- und Zielfläche eine Bedeutung besitzt, d.h. dass er nur im Nahfeld einen signifikanten Einfluss auf das Berechnungsergebnis ausübt. Für das Fernfeld ergab sich für alle Simulationen ein ähnlicher Verlauf, wie er in **Abb. 4-12** dargestellt ist. Im mittleren Bereich ist kaum eine Abweichung zwischen dem berechneten Strahlprofil mit und ohne Neigungsfaktor erkennbar. Lediglich an den Außenbereichen kommt es zu Abweichungen, die unter 1% liegen. In diesen Bereichen ist bei einer gaußförmigen Intensitätsverteilung die Feldstärke auf einen Bruchteil des Maximums abgefallen. Demnach haben die Abweichungen durch den Neigungsfaktor keinen großen Einfluss auf das Gesamtergebnis. Der Neigungsfaktor kann in guter Näherung für das Fernfeld vernachlässigt werden. Für eine sehr genaue Berechnung kann diese Option jedoch eingestellt werden.

Für Berechnungen im Nahfeld besitzt der Neigungsfaktor eine größere Bedeutung. Im Nahfeld entstehen selbst bei einer Elementgröße von einfacher Wellenlänge Nebenmaxima. Der Neigungsfaktor reduziert den Einfluss dieser Nebenmaxima, beseitigt sie aber nicht vollständig. Eine andere Möglichkeit die Entstehung der Nebenmaxima zu verhindern, ist die in **4.1** beschriebene Methode der Verkleinerung der Elementgröße. Durch Verkleinerung der Elementgröße ergibt sich ein ähnliches Bild wie in **Abb. 4-12**. Zur Verdeutlichung sind die Berechnungsergebnisse für ein Beispiel für zwei verschiedene Elementgrößen in **Abb. 4-13** und **Abb. 4-14** dargestellt. Zu sehen ist, dass der Neigungsfaktor bei einem hinreichend kleinen Elementabstand so gut wie keine Bedeutung besitzt.

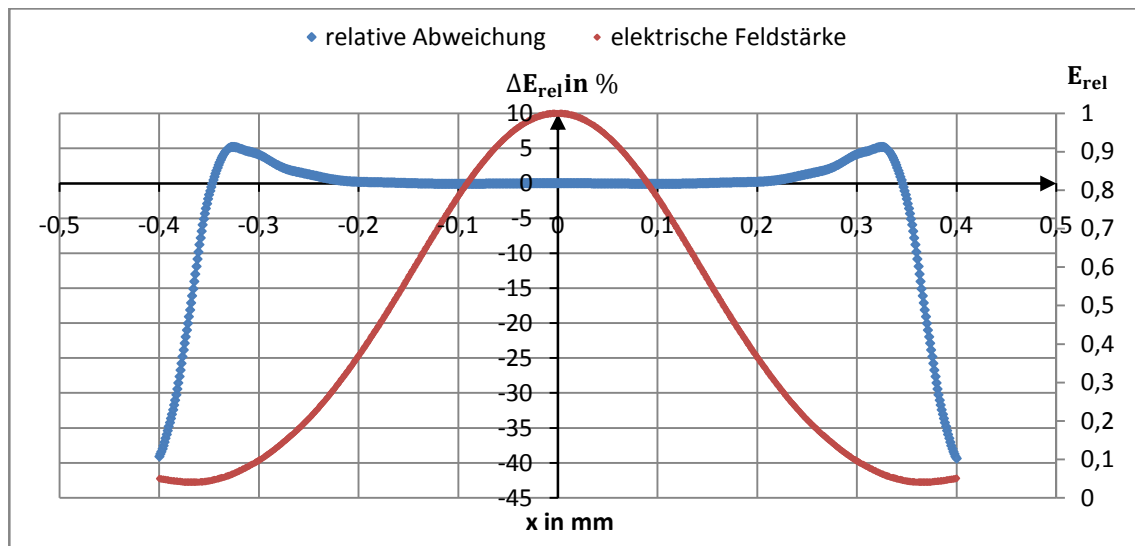


Abb. 4-13 Darstellung der Abhängigkeit der relativen Abweichung (blau) von x ; zum Vergleich der Verlauf der elektrischen Feldstärke (rot); gewählte Größen: $w_{86} = 200 \mu\text{m}$, $z_1 = 50 \mu\text{m}$, Elementgröße 1λ

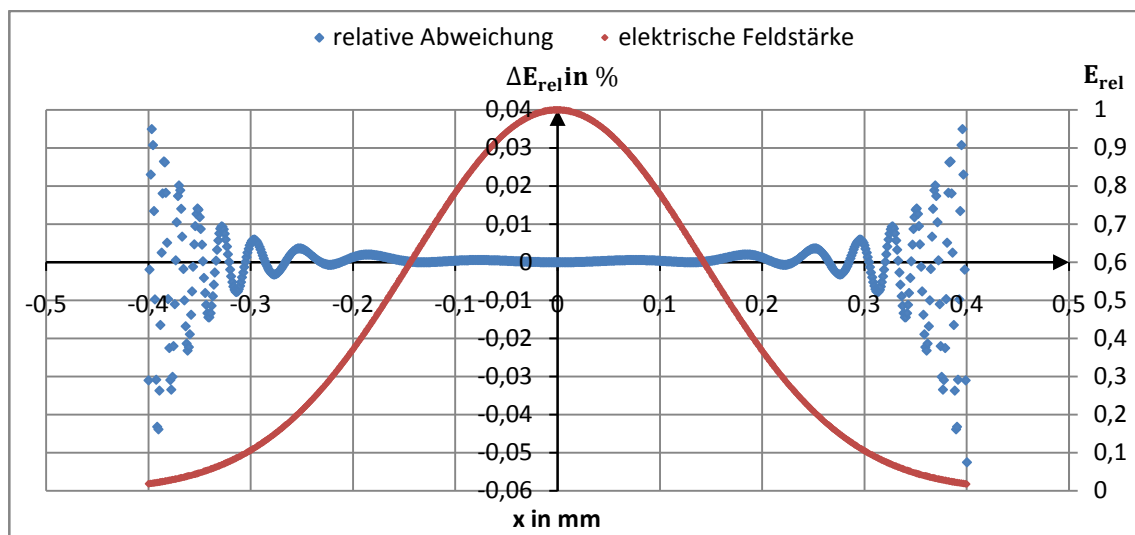
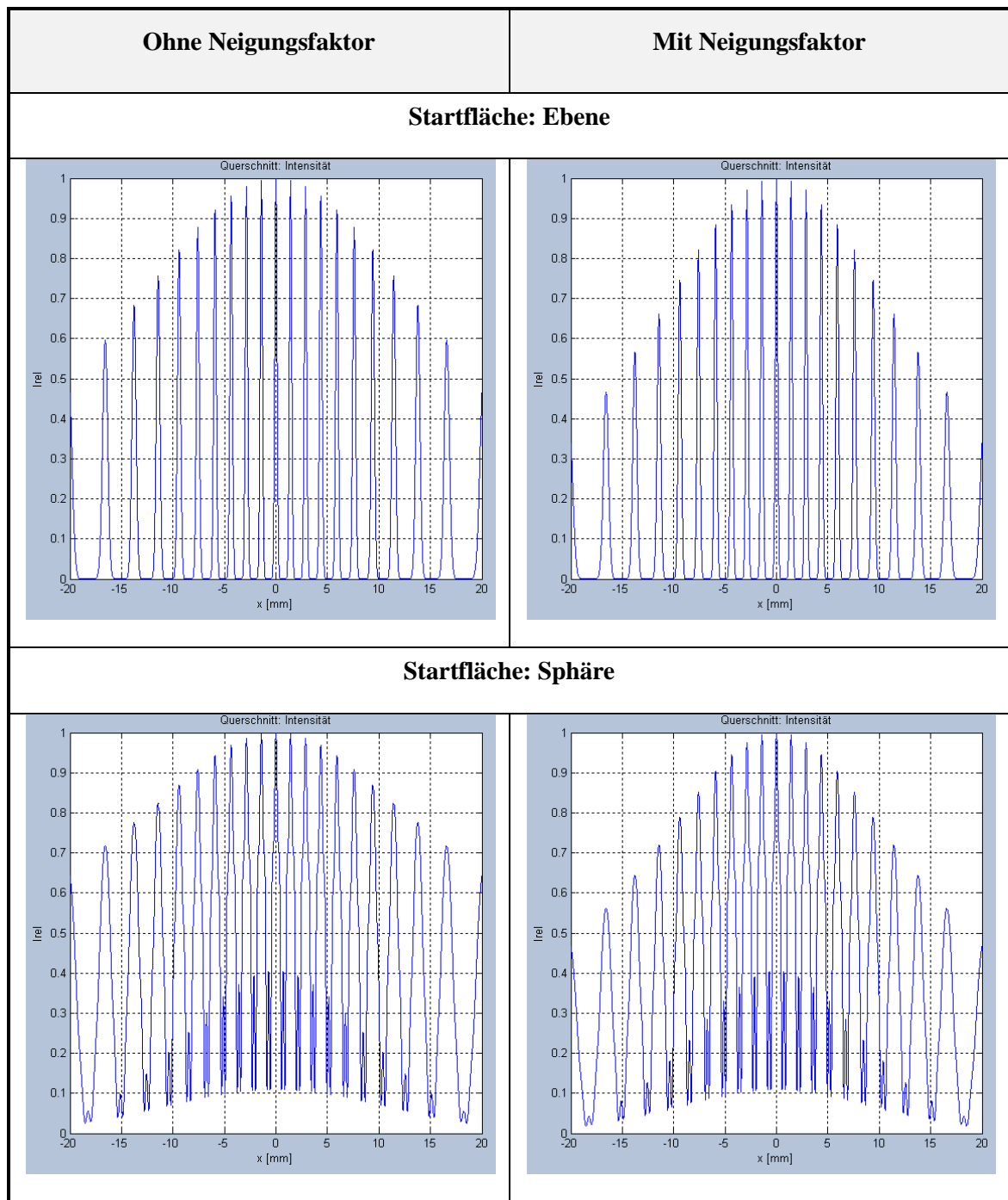


Abb. 4-14 Darstellung der Abhängigkeit der relativen Abweichung (blau) von x ; zum Vergleich der Verlauf der elektrischen Feldstärke (rot); gewählte Größen: $w_{86} = 200 \mu\text{m}$, $z_1 = 50 \mu\text{m}$, Elementgröße $0,5\lambda$

Da eine Beeinflussung des Neigungsfaktors auf die Größe der Nebenmaxima festgestellt wurde, wurden die in **Tab. 4-2** dargestellten Parameter erneut verwendet um den Einfluss zu konkretisieren. Der Krümmungsradius der sphärischen Grenzfläche beträgt ebenfalls $R = -1\text{mm}$.



Tab. 4-6 Erhaltene Strahlprofile im Fernfeld mit und ohne Neigungsfaktor für Ebene und Sphäre; $w_{86} = 30 \mu\text{m}$; Elementgröße 15λ

Der Neigungsfaktor bewirkt, dass äußere Nebenmaxima schwächer ausgebildet werden als innere. Die äußeren besitzen eine 14% geringere Intensität. Die Lage der Nebenmaxima verändert sich bei Berechnung mit und ohne Neigungsfaktor nicht.

Neben den Untersuchungen zu ebenen Flächen wurde auch Simulationen mit sphärisch gekrümmten Flächen durchgeführt. Die verwendeten Parameter sind in **Tab. 4-7** dargestellt, die Ergebnisse in **Abb. 4-15**.

Laserparameter	Parameter der Startfläche	Parameter der Grenzfläche
$\lambda = 100 \text{ nm}$ $P = 10 \text{ W}$ Gaußstrahl $w_{86} = 500 \text{ }\mu\text{m}$	Geometrie: Sphäre $R = -1,8 \text{ mm}$ $z_0 = 0$ Begrenzung: Kreis $R_{\text{aperture}} = 2,5 \cdot w_{86}$ Elementgröße: 750 nm Brechzahl: $n = 1$	Geometrie: Ebene $z_1 = 100 \text{ }\mu\text{m}$ Begrenzung: Kreis $R_{\text{aperture}} = 1,5 \text{ mm}$ Elementgröße: 2λ Brechzahl: $n = 1$

Tab. 4-7 Parameter zur Untersuchung des Einflusses des Neigungsfaktors für eine sphärisch gekrümmte Oberfläche

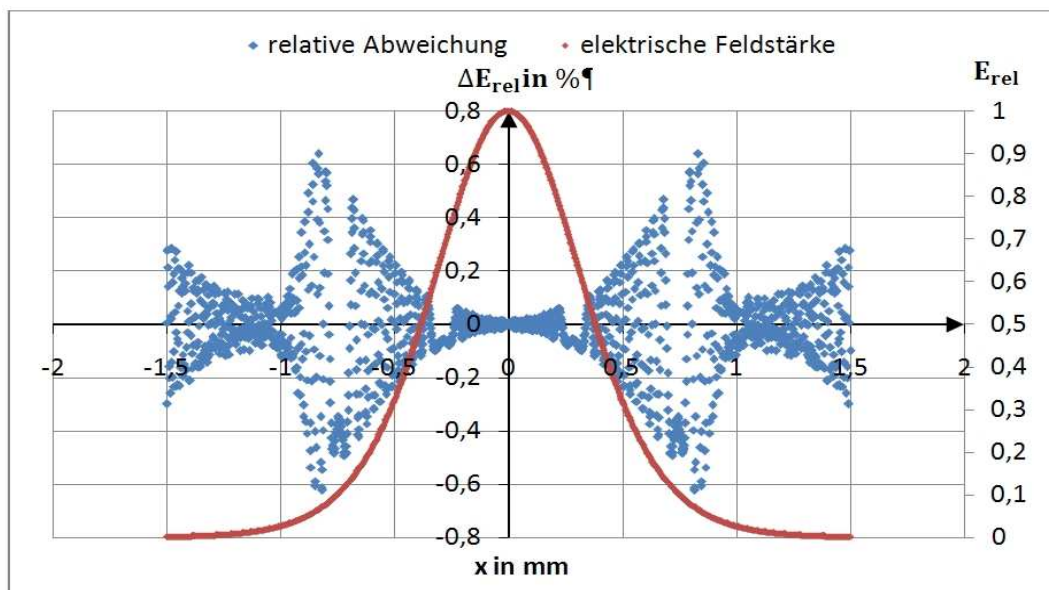


Abb. 4-15 Darstellung der Abhängigkeit der relativen Abweichung (blau) von x für eine sphärisch gekrümmte Oberfläche; zum Vergleich der Verlauf der elektrischen Feldstärke (rot)

Der graphische Verlauf der Abhängigkeit der relativen Abweichung für eine sphärisch gekrümmte Oberfläche weicht vom Verlauf für eine ebene Fläche ab (vgl. **Abb. 4-12**). Die Abweichungen sind nicht in den äußeren Bereichen am größten sondern in den mittleren. In den Bereichen nahe der Amplitude sind die Abweichungen am geringsten. Die Abweichungen steigen mit zunehmender radialer Koordinate. Dieser Anstieg erfolgt bis zu einem Maximum. Danach erfolgen ein rapider Abfall und anschließend wieder ein Anstieg. Würde die Begrenzung größer gewählt werden, würde sich der Verlauf periodisch fortsetzen.

Die Simulation lieferte erst ab einer Elementgröße von 750 nm zufriedenstellende Ergebnisse. Eine größere Elementgröße bewirkte ein starkes Rauschen. Durch den kleinen Elementabstand wird der Neigungsfaktor nicht mehr benötigt. Die Abweichungen betragen maximal $0,7\%$.

4.3 Berechnungsdauer

In diesem Kapitel wird der Einfluss der Berechnungsvariante auf die benötigte Berechnungsdauer charakterisiert. Für verschiedene Elementanzahlen von Start- und Grenzfläche wurden für die Berechnungsvarianten: Rotationssymmetrie (Linie und Fläche) und keine Rotationssymmetrie, die Berechnungszeiten bestimmt. Da diese Zeiten immer rechnerbedingten Schwankungen, z.B. durch andere parallel ablaufende Prozesse, unterliegen, wurden jeweils 3 bis 5 Berechnungen durchgeführt und deren Berechnungszeit bestimmt. Von diesen Messwerten wurde anschließend das arithmetische Mittel gebildet, welches in den nachfolgenden Diagrammen als mittlere Berechnungszeit \bar{t} dargestellt ist.

4.3.1 Variation der Elementanzahl der Grenzfläche

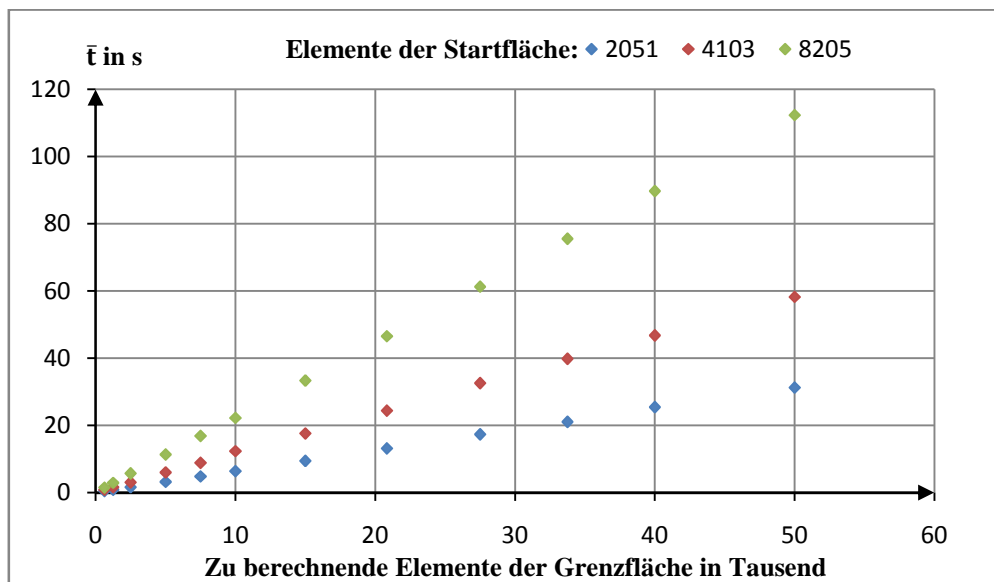


Abb. 4-16 Darstellung der Abhängigkeit der Berechnungszeit \bar{t} von der Elementanzahl der Grenzfläche für die Rotationssymmetrie: Abstrahlgeometrie Linie

Die Variation der Elemente der Grenzfläche für Rotationssymmetrie: Linienabstrahlung ergab den in **Abb. 4-16** dargestellten Verlauf. Die Berechnungen wurden für drei verschiedene Elementanzahlen der Startfläche durchgeführt. Ein linearer Zusammenhang zwischen der Elementanzahl der Grenzfläche und der benötigten Berechnungszeit konnte festgestellt werden. Durch Verdopplung der Elemente der Startfläche erhöhte sich die Berechnungszeit für die gleiche Elementanzahl auf der Grenzfläche durchschnittlich um den Faktor 1,86 und für eine Vervierfachung durchschnittlich um den Faktor 3,50. Ein linearer Zusammenhang zwischen der

Elementanzahl der Startfläche und der damit verbundenen mittleren Berechnungszeit ist auch hier zu vermuten und wird unter **4.3.2** weiter untersucht.

Für die Berechnungsvariante Rotationsgeometrie: Linie und Fläche muss die Abbildung nur auf eine Linie in negativer x-Richtung auf der Zielfläche vorgenommen werden (siehe **3.2.1**). Lediglich die Hälfte der Elementanzahl der Zielfläche muss berechnet werden, d.h. die tatsächlich zu berechnende Elementanzahl beträgt die Hälfte der Gesamtelementanzahl. In den Diagrammbeschriftungen wird durch den Zusatz: „Zu berechnende“, darauf hingewiesen.

Die gleiche lineare Abhängigkeit zwischen zu berechnender Elementanzahl auf der Grenzfläche und Berechnungsdauer konnte auch für Rotationssymmetrie Flächenabstrahlung und Berechnungen für keine Rotationssymmetrie bestätigt werden (siehe **Abb. 4-17** bzw. **Abb. 4-18**). Zu sehen ist weiterhin, dass die Berechnungszeit um mehrere Größenordnungen für die Abstrahlung der gesamten Fläche ansteigt. An dieser Stelle wird der entscheidende Vorteil der Linienabstrahlung deutlich: Die benötigte Berechnungszeit reduziert sich auf einen Bruchteil.

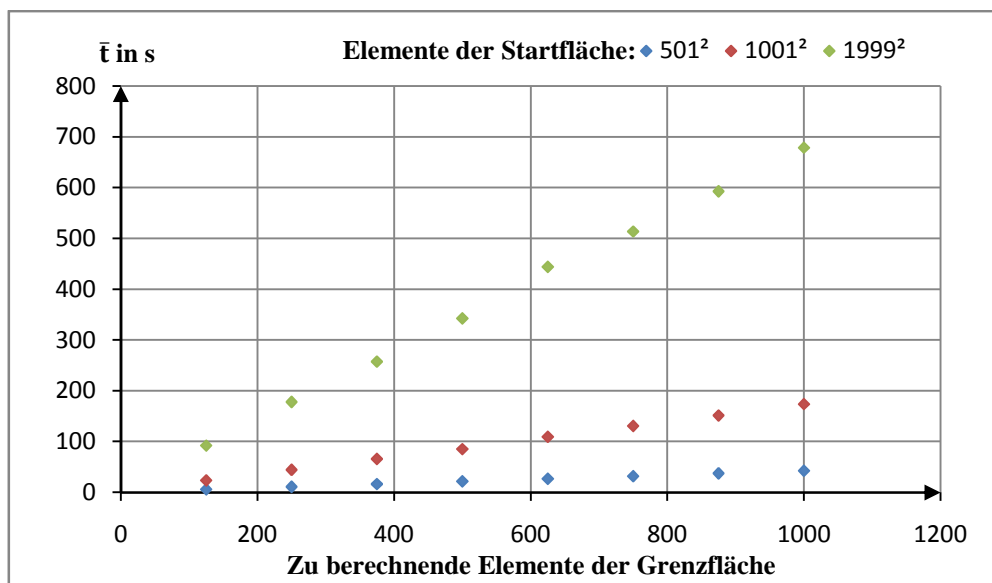


Abb. 4-17 Darstellung der Abhängigkeit der Berechnungszeit \bar{t} von der Elementanzahl der Grenzfläche für die Rotationssymmetrie: Abstrahlgeometrie Fläche

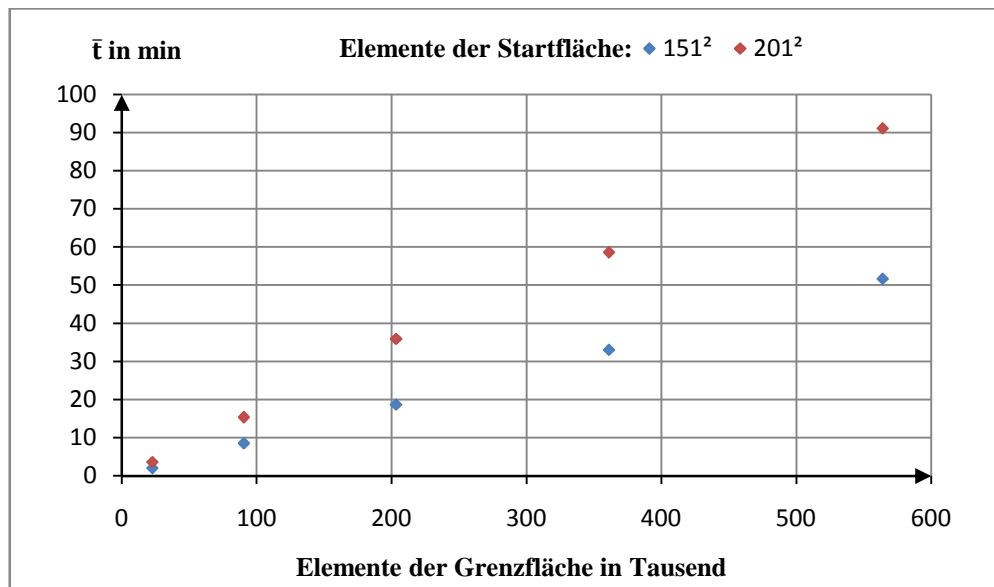


Abb. 4-18 Darstellung der Abhängigkeit der Berechnungszeit \bar{t} von der Elementanzahl der Grenzfläche für keine Rotationssymmetrie

Der Grund für die erhöhte Berechnungsdauer für Varianten, welche eine Flächenabstrahlung nutzen, ist, dass die Gesamtelementanzahl aus den Elementanzahlen in x- und y-Richtung durch $n_x \cdot n_y$ gebildet wird. Eine Matrix bei Flächenabstrahlung enthält somit sehr viel mehr Elemente als bei Linienabstrahlung. Die Folge ist, dass mehr Rechenaufwand betrieben werden muss, um eine konkrete Aufgabe zu berechnen.

Hinzu kommt, dass bei dieser Variante nur eine begrenzte Größe der Matrizen berechenbar ist. Wie schon im Abschnitt 3.2 beschrieben wurde, erfolgt bei Überschreitung der Matrixgröße von 2000×2000 Elementen eine Sektorisierung. Die gerade nicht benötigten Teilmatrizen werden als mat-Files auf die Festplatte ausgelagert. Dieser Speichertyp weist eine optimierte Lade- und Speicherzeit für Matrizen auf, wodurch sich die Berechnungszeit nur unwesentlich von der Berechnung der gesamten Matrix unterscheidet. Dies ist auch in **Abb. 4-19** zu sehen. Zur Erstellung dieser Graphen wurde im Berechnungsalgorithmus festgelegt, dass die Sektorisierung bereits für 200×200 Elemente erfolgt, anstatt für 2000×2000 Elemente. Zum Vergleich wurde die Berechnung für eine Elementanzahl der Startfläche von 501 Elemente in x- und y-Richtung erneut mit Sektorisierung durchgeführt. Die Berechnungszeiten mit Sektorisierung weisen dabei einen größeren Anstieg auf und sind im Durchschnitt 6% größer als ohne Sektorisierung.

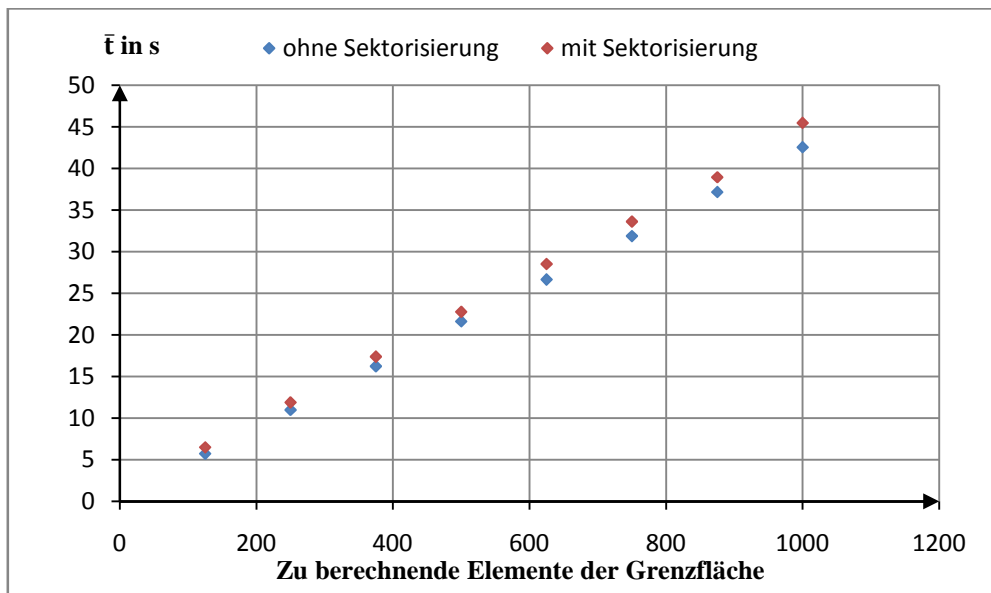


Abb. 4-19 Darstellung der Abhängigkeit der Berechnungszeit \bar{t} von der Elementanzahl der Startfläche (501^2 Elemente) für die Rotationssymmetrie: Abstrahlgeometrie Fläche im Vergleich: mit und ohne Sektorisierung

4.3.2 Variation der Elementanzahl der Startfläche

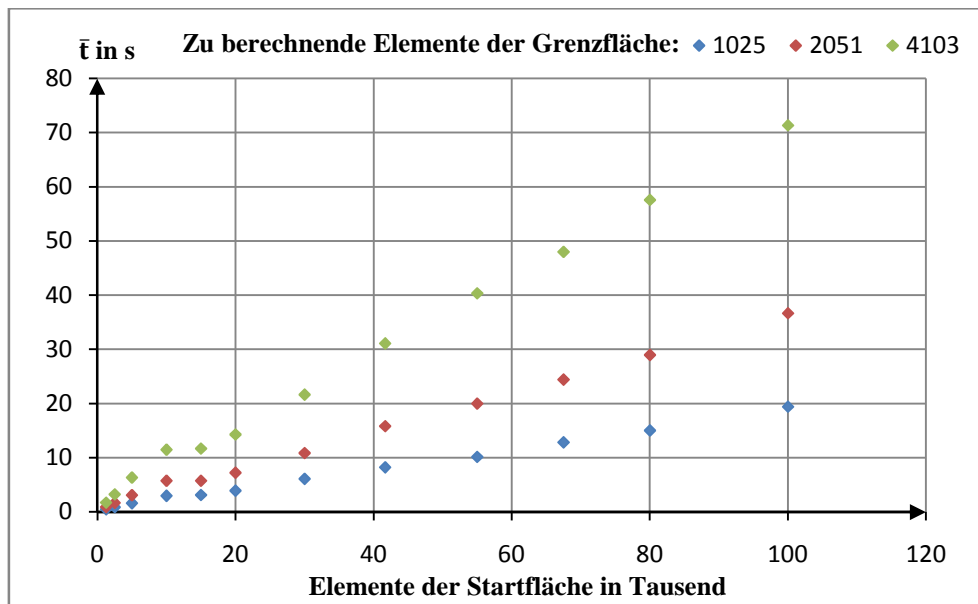


Abb. 4-20 Darstellung der Abhängigkeit der Berechnungszeit \bar{t} von der Elementanzahl der Startfläche für die Rotationssymmetrie: Abstrahlgeometrie Linie

Die Berechnungen ergaben eine abschnittsweise lineare Abhängigkeit der mittleren Berechnungszeit von der Elementanzahl auf der Startfläche existiert (siehe **Abb. 4-20**). Anhand des Graphen ist ersichtlich, dass die Berechnungszeit im Bereich kleiner 10.000 Elemente der Startfläche schneller steigt, als im Bereich größer 10.000. Im Bereich von 10.000 bis 15.000 scheint die Berechnungszeit sogar nahezu für alle drei Graphen konstant zu bleiben. Die Ursache ist die grobe Einteilung der gewählten Elemente.

Durch Verringerung der Differenz zwischen den Elementanzahlen auf 500 ergibt sich ein ganz anderer Verlauf, welcher in **Abb. 4-21** dargestellt ist. Zu sehen ist, dass der Verlauf nur annähernd linear ist. Aufgrund der sich wiederholenden Sprungstellen weist der Graph einen unstetigen Verlauf auf. Größere Elementanzahlen benötigen teilweise eine kleinere Berechnungszeit als kleine Elementanzahlen. Die Ursache dafür liegt wahrscheinlich in der rechnerbedingten Struktur der Speicherbelegung.

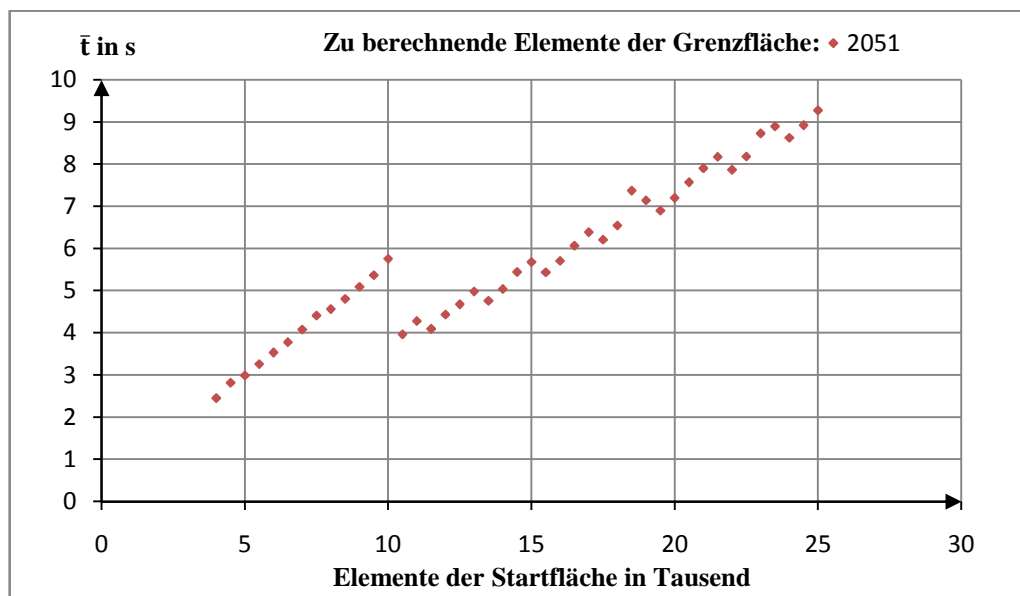


Abb. 4-21 Darstellung der Abhängigkeit der Berechnungszeit \bar{t} von der Elementanzahl der Startfläche für die Rotationssymmetrie: Abstrahlgeometrie Linie in einem ausgewählten Bereich

Für Rotationssymmetrie: Abstrahlgeometrie Fläche und keiner Rotationssymmetrie ergaben sich bei den gewählten Elementanzahlen keine Unstetigkeit im grafischen Verlauf (siehe **Abb. 4-22** und **Abb. 4-23**). Der Grund ist, dass für die Fläche die Gesamtelementanzahl aus dem Produkt der Elementzahl in x- und y-Richtung gebildet wird. Eine Elementanzahl von 501 Elementen in x- und y-Richtung bewirkt demnach eine Gesamtelementanzahl von 251 001. Aufgrund der großen Abstände zwischen den Elementanzahlen wird der Effekt der Sprungstellen nicht sichtbar. Untersuchungen mit den gleichen Elementanzahlen, wie in **Abb. 4-21**, ergaben denselben qualitativen Verlauf. Da sich die Graphen qualitativ nicht unterscheiden wird an dieser Stelle auf eine separate Darstellung verzichtet.

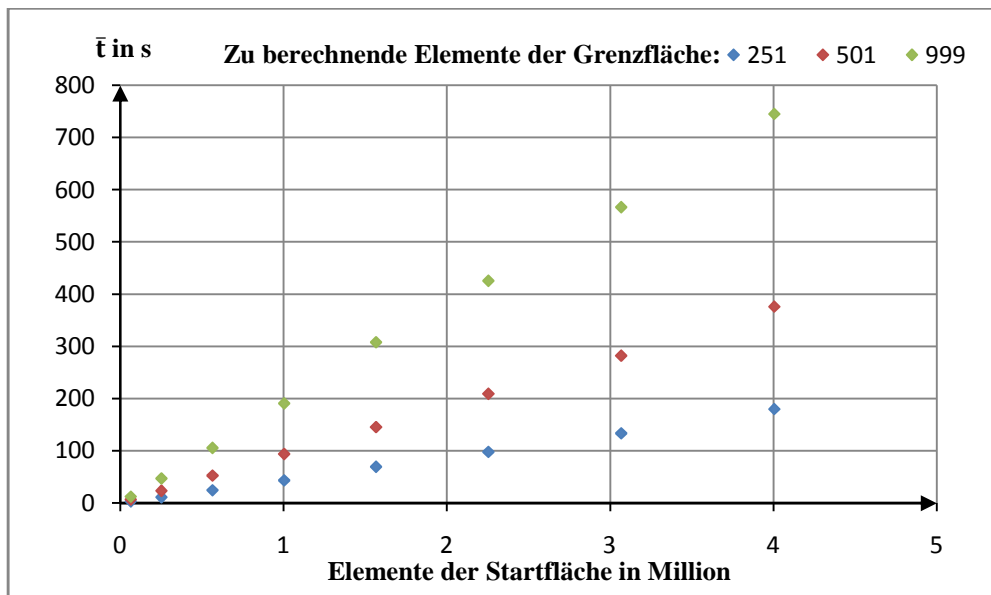


Abb. 4-22 Darstellung der Abhängigkeit der Berechnungszeit \bar{t} von der Elementanzahl der Startfläche für die Rotationssymmetrie: Abstrahlgeometrie Fläche

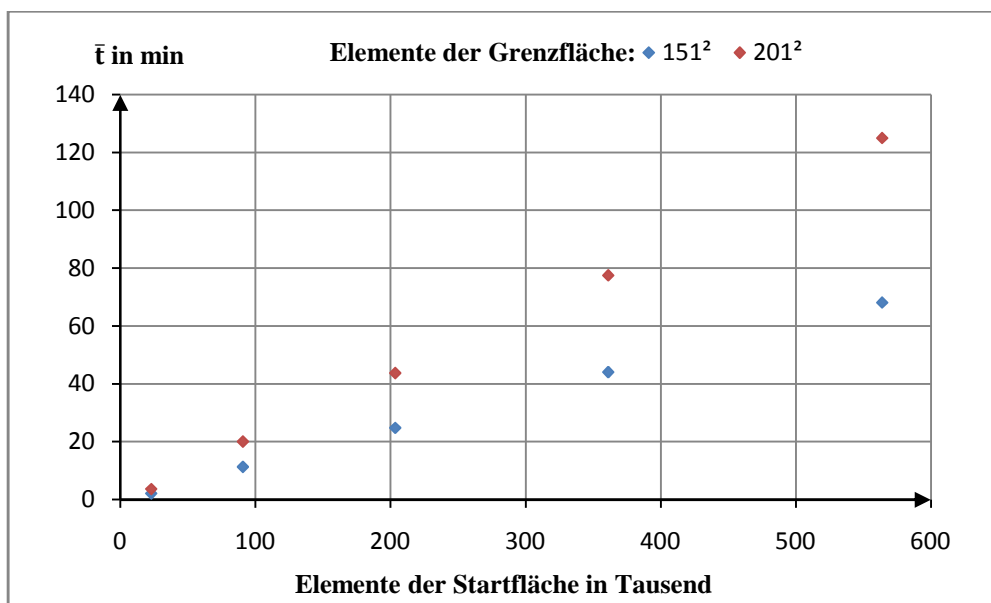


Abb. 4-23 Darstellung der Abhängigkeit der Berechnungszeit \bar{t} von der Elementanzahl der Startfläche für die keine Rotationssymmetrie

Die Variation der Elementanzahl der Startfläche ergab qualitativ die gleichen grafischen Verläufe wie eine Variation der Elementzahl der Grenzfläche. Die Berechnungsdauer steigt mit zunehmender Elementanzahl immer weiter an. Die Linienabstrahlung besitzt wieder die kürzeste Berechnungsdauer und Berechnungen ohne Rotationssymmetrie haben die größte Berechnungsdauer.

4.3.3 Abschätzung der Berechnungsdauer

Die Berechnungen ergaben einen direkten Einfluss der Elementanzahl von Start- und Zielfläche auf die Berechnungszeit. Beide weisen direkte Proportionalität auf. Aufgrund dieser Tatsache ist es möglich eine Abschätzung der benötigten Rechenzeit durchzuführen. Dazu wird die Berechnungszeit durch die Elementanzahl der Startfläche und durch die Elementanzahl der Grenzfläche geteilt. Die erhaltene Zeit wird fortan als normierte Berechnungszeit t_{norm} bezeichnet. Für alle Berechnungsvarianten stellten sich jeweils zwei Bereiche heraus: Die sich in den einzelnen Bereichen ergebenden normierten Berechnungszeiten für die dazugehörige Berechnungsgrundlage ist in **Tab. 4-8** zu finden. Die normierten Berechnungszeiten wurden durch Mittelwertbildung aller im Vorfeld ermittelten Berechnungszeiten bestimmt.

Um die benötigte Rechenzeit abzuschätzen muss die normierte Berechnungszeit jeweils mit der Gesamtelementanzahl der Start- und Zielfläche multipliziert werden.

Berechnungsmethode	Elementbereich der Startfläche in Tausend	t_{norm} in ns
Rotationssymmetrie	< 10	301
Abstrahlgeometrie: Linie	≥ 10	186
Rotationssymmetrie	< 4000	178
Abstrahlgeometrie: Fläche	≥ 4000	188
Keine Rotationssymmetrie	< 0,25	243
	$\geq 0,25$	323

Tab. 4-8 Erhaltene normierte Berechnungszeiten

Die mithilfe der normierten Berechnungszeiten abgeschätzten Berechnungszeiten, erwiesen sich als sehr genau. Sie können genutzt werden, um eine Vorstellung des Rechenaufwandes zu bekommen. So sieht der Benutzer sofort, dass eine Berechnung mit den von ihm gewählten Parametern so gut wie nicht möglich ist, wenn die abgeschätzte Berechnungszeit mehrere Jahre beträgt. Ein paar ausgewählte Beispiele für den Vergleich der abgeschätzten Berechnungszeit mit der benötigten Berechnungszeit ist im Anhang unter C zu finden.

4.4 Zusammenfassung und Ausblick

Die Simulationen und Untersuchungen haben ergeben, dass eine zu groß gewählte Elementgröße auf der Abstrahlfläche das Berechnungsergebnis negativ beeinflusst, da zum einen ein Rauschen im Strahlprofil auftritt und zum anderen Nebenmaxima im Strahlprofil erscheinen.

Die maximal mögliche Elementgröße der Abstrahlfläche ist der Entfernung zur Zielfläche direkt proportional und dem Strahlradius auf der Abstrahlfläche indirekt proportional. Aus diesem Zusammenhang lässt sich eine Formel zur Abschätzung der Elementgröße **(4-2)** ableiten. Die Formel wird in den folgenden Programmversionen implementiert werden. Sie wird als Option für die Elementgröße als automatische Elementgrößenbestimmung verfügbar sein.

(4-2) gilt in seiner jetzigen Form nur für eine Ebene als Abstrahlfläche. Für eine gekrümmte Oberfläche vergrößert sich die Elementgröße aufgrund der Projektion der Begrenzung auf die gekrümmte Oberfläche (siehe **Abb. 4-6**). Der Erstellungsalgorithmus der Koordinaten muss daher so modifiziert werden, dass die Elementgröße auch bei der Projektion erhalten bleibt.

Die Betrachtungen des Neigungsfaktors ergaben, dass er so gut wie keinen Einfluss auf das Ergebnis im Fernfeld besitzt. Lediglich für das Nahfeld hat er Auswirkungen. Im Nahfeld ist es besonders wichtig eine kleine Elementgröße zu wählen, da sich anderenfalls unerwünschte Nebenmaxima ergeben. Der Neigungsfaktor reduziert den Einfluss dieser Nebenmaxima, kann sie aber nicht beseitigen. Ab einer hinreichend kleinen Elementgröße hat der Neigungsfaktor auch im Nahfeld keine Bedeutung mehr.

Der Neigungsfaktor wird in späteren Programmversionen als zusätzliche Option zur Verfügung stehen. Aktuell ist mit ihm nur die Berechnung für die Startfläche möglich, da die Richtung der Wellennormalen auf den Grenzflächen nicht bekannt ist. Aus diesem Grund wurde er noch nicht vollständig in den Programmablauf implementiert.

Die Berechnungsdauer ist der Elementanzahl der Startfläche und der Zielfläche direkt proportional. Aufgrund dieser Eigenschaft lässt sich die Berechnungsdauer mithilfe der normierten Berechnungsdauern t_{norm} abschätzen. Die Berechnungsvarianten der Rotationsymmetrie haben eine sehr viel kürzere Berechnungsdauer als Berechnungen ohne Rotationsymmetrie. Die Linienabstrahlung hat sich dabei als die schnellste Berechnungsmethode erwiesen. Sie ist jedoch nicht universell einsetzbar. Da Berechnungen auf der Grundlage von Rotationssymmetrie: Abstrahlgeometrie Fläche und keiner Rotationssymmetrie mitunter sehr viel Rechenzeit benötigen, muss versucht werden diese weiter zu entwickeln.

Eine Möglichkeit wäre durch Interpolation gegeben. So müssten nicht alle Elemente der Zielfläche berechnet werden, da die fehlenden Elemente durch Interpolation bestimmt würden. MATLAB bietet dazu auch vorgefertigte Funktionen für die 3D-Interpolation, wodurch diese Variante auch für keine Rotationssymmetrie anwendbar ist.

Auch die Erprobung anderer Berechnungsmethoden, wie das Spectrum-of-plane-waves Integral oder das Rayleigh-Sommerfeld Integral könnte neue Berechnungsmöglichkeiten eröffnen und eine kürzere Berechnungszeit bewirken. Auch über den Einsatz von Hybridformen, wie der des Colins-Integrals, welches eine Kombination aus geometrischer Optik und Wellenoptik bietet, ist zu überdenken.

Literatur

- [Born1999] Born, Max: Principles of optics: Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light – 7. Auflage
Cambridge: Cambridge University Press, 1999
- [Damm2009] Damm, Matthias: Bericht zum Projektmodul: FASKAN, Fiber-Tube-Laser
Hochschule Mittweida, 2009
- [DIN2005] Laser und Laseranlagen -
Prüfverfahren für Laserstrahlmessungen, Divergenzwinkel und Beugungsmaßzahlen -
Teil 1: Stigmatische und einfach astigmatische Strahlen
DIN EN ISO 11145-1:2005
- [DIN2008] Optik und Photonik –
Laser und Laseranlagen -
Begriffe und Formelzeichen (ISO 11145:2006).
DIN EN ISO 11145:2008
- [Graf2009] Graf, Thomas, Laser: Grundlagen der Laserstrahlquellen – 1. Auflage
Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2009
- [Hügel2009] Hügel, Helmut: Laser in der Fertigung. – 2. Auflage
Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2009
- [Jack1999] Jackson, John: Classical Electrodynamics – 3. Auflage
New York: John Wiley & Sons, Inc., 1999
- [Kirch1882] Kirchhoff, Gustav, Zur Theorie der Lichtstrahlen
Berlin: Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1882
- [Kuka2009] Kuka, Georg, Vorlesungsskript: Methoden der Optikentwicklung
Hochschule Mittweida, 2009

- [Math2010] URL: <http://mathworld.wolfram.com/HermitePolynomial.html>
verfügbar am 15.08.2010
- [MaWo2010] URL: <http://www.mathworks.de/matlabcentral/fileexchange/7943-freezecolors-unfreezecolors>
verfügbar am 02.07.2010
- [Mesch2008] Meschede, Dieter: Optik, Licht und Laser – 3. Auflage
Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2008
- [Mikro2010] URL: http://www.iapmw.unibe.ch/teaching/vorlesungen/mikrowellenphysik/HS_2009/MWphysics_HS_09_Gauss_beam.pdf
verfügbar am 02.07.2010
- [Wong1994] Wong, Chun Wa, Mathematische Physik – 1. Auflage
Heidelberg :Spektrum Akademischer Verlag GmbH. 1994

Anlagen

A Rechengesetze und Integralsätze	I
B Integration von Moden höherer Ordnung	III
C Vergleich Berechnungsdauer	V
D Programmdokumentation	VII
D 1 Dateiübersicht	VII
D 2 Bedienung	XII
D 3 Verwendete Formeln	XVIII
D 3.1 Strahlprofile	XVIII
D 3.2 Maximale Intensität und enthaltene Leistung	XXIV
D 3.3 Strahlenoptische Berechnungen	XXV
D 4 Berechnungsmöglichkeiten	XXXI

A Rechengesetze und Integralsätze

Rechenregeln Vektoranalysis

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{u}) = 0 \qquad \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{u} = 0 \qquad (i)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{u}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \Delta \vec{u} \qquad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{u}) - \operatorname{div} \operatorname{grad} \vec{u} \qquad (ii)$$

$$\nabla \times (C\vec{u}) = C \nabla \times \vec{u} \qquad \operatorname{rot} (C\vec{u}) = C \operatorname{rot} \vec{u} \qquad (iii)$$

$$\nabla \cdot (C\vec{u}) = C \nabla \cdot \vec{u} \qquad \operatorname{div} (C\vec{u}) = C \operatorname{div} \vec{u} \qquad (iv)$$

Gaußscher Integralsatz

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{u} \, dV = \oint_{\partial V} \vec{u} \cdot d\vec{A} \qquad \iiint_V \operatorname{div} \vec{u} \, dV = \oint_{\partial V} \vec{u} \cdot d\vec{A} \qquad (v)$$

Stokesscher Integralsatz

$$\iint_A (\nabla \times \vec{u}) \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial A} \vec{u} \cdot d\vec{s} \qquad \iint_A \operatorname{rot} \vec{u} \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial A} \vec{u} \cdot d\vec{s} \qquad (vi)$$

Laplaceoperator

$$\begin{array}{l} \text{Kartesische} \\ \text{Koordinaten} \end{array} \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (vii)$$

$$\begin{array}{l} \text{Zylinderkoordinaten} \end{array} \qquad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (viii)$$

$$\begin{array}{l} \text{Kugelkoordinaten} \end{array} \qquad \Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \qquad (ix)$$

Greensche Integralsätze

Erste greensche
Identität

$$\iiint_V (G \cdot \Delta E + \nabla G \cdot \nabla E) dV = \oiint_{\partial V} G \cdot \nabla E d\vec{A} \quad (\text{x})$$

Zweite greensche
Identität

$$\iiint_V (E \cdot \Delta G + \nabla G \cdot \nabla E) dV = \oiint_{\partial V} E \cdot \nabla G d\vec{A}$$
$$\iiint_V (G \cdot \Delta E - E \cdot \Delta G) dV = \oiint_{\partial V} (G \cdot \nabla E - E \cdot \nabla G) d\vec{A} \quad (\text{xi})$$

B Integration von Moden höherer Ordnung

Aus der Literatur [Math2010] ist für die hermiteschen Polynome folgende Beziehung gegeben:

$$u_n = \sqrt{\frac{a}{2^n n! \sqrt{\pi}}} \cdot H_n(ax) \cdot e^{-\frac{a^2}{2} x^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot u_n(x) \cdot u_m(x) dx = \frac{2n+1}{2a^2} \quad \text{für } m = n \quad (\text{xii})$$

Die Intensität ist durch folgende Beziehung gegeben:

$$I = \frac{E \cdot E^*}{Z_W}$$

Daher folgt aus (2-41):

$$I_{mn}(x, y, z) = I_{0,00} \cdot \frac{1}{2^m \cdot m! \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \frac{w_{0x,0}}{w_{x,0}(z)} \cdot \left(H_m \left(\frac{\sqrt{2} \cdot x}{w_{x,0}(z)} \right) \right)^2 \cdot e^{-2 \frac{x^2}{w_{x,0}^2(z)}} \\ \cdot \frac{1}{2^n \cdot n! \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \frac{w_{0y,0}}{w_{y,0}(z)} \cdot \left(H_n \left(\frac{\sqrt{2} \cdot y}{w_{y,0}(z)} \right) \right)^2 \cdot e^{-2 \frac{y^2}{w_{y,0}^2(z)}}$$

Diese Beziehung soll nun in (2-46) eingesetzt werden. Der Divisor aus (2-46) gibt die im Strahlquerschnitt enthaltene Leistung an.

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_{mn}(x, y, z) dx dy = I_{0,00} \cdot r_y \cdot r_x$$

Da jeweils unabhängige Terme für x und y existieren, können diese unabhängig voneinander integriert werden:

$$r_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^n \cdot n! \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \frac{w_{0y,0}}{w_{y,0}(z)} \cdot \left(H_n \left(\frac{\sqrt{2} \cdot y}{w_{y,0}(z)} \right) \right)^2 \cdot e^{-2 \frac{y^2}{w_{y,0}^2(z)}} dy$$

Aus der Orthogonalitätsrelation (2-42) folgt:

$$r_y = \frac{w_{0y,0}}{\sqrt{2}} \quad r_x = \frac{w_{0x,0}}{\sqrt{2}}$$

Und als endgültiges Ergebnis

$$P = I_{0,00} \cdot \frac{w_{0y,0}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{w_{0x,0}}{\sqrt{2}}$$

Die im Strahlprofil enthaltene Leistung ist somit nur von der maximalen Intensität sowie den Radien in x- und y-Richtung des Grundmodes abhängig.

Zur Integration des Dividenden aus (2-46) wird Beziehung (xii) ausgenutzt. Die Integration über x und y kann wieder separat erfolgen.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot I_{mn}(x, y, z) dx dy = I_{0,00} \cdot R_x \cdot R_y$$

$$R_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2^m \cdot m! \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \frac{w_{0x,0}}{w_{x,0}(z)} \cdot \left(H_m \left(\frac{\sqrt{2} \cdot x}{w_{x,0}(z)} \right) \right)^2 \cdot e^{-2 \frac{x^2}{w_{x,0}^2(z)}} dx$$

$$R_x = \frac{w_{0x,0}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2m+1}{4} w_{x,0}^2$$

$$R_y = r_y$$

Nun werden die Zwischenergebnisse zur kompletten Lösung zusammengefasst:

$$\sigma_x^2(z) = \frac{R_y \cdot R_x}{r_y \cdot r_x} = \frac{\frac{w_{0x,0}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2m+1}{4} w_{x,0}^2}{\frac{w_{0x,0}}{\sqrt{2}}} = \frac{2m+1}{4} w_{x,0}^2$$

Schließlich ergibt sich der Strahlradius nach (2-47) zu:

$$w_x(z) = 2 \sqrt{\sigma_x^2(z)} = w_{x,0} \cdot \sqrt{2m+1}$$

C Vergleich Berechnungsdauer

In der nachfolgenden Tabelle sind die mithilfe der normierten Berechnungsdauer t_{norm} ermittelten Berechnungsdauern den tatsächlich benötigten Zeiten gegenüber gestellt. Die relative Abweichung berechnet sich wie folgt:

$$\Delta t_{rel} = \left(\frac{t_{ber}}{t_{tat}} - 1 \right) \cdot 100\%$$

Je nach Berechnungsvariante unterscheiden sich die verwendeten Elementanzahlen. Daher wurde in der nachfolgenden Tabelle eine Trennung von eingestellten Elementen für x- und y-Richtung und den davon wirklich verwendeten Elementen vollzogen.

Startfläche		Zielfläche		Berechnete Zeit t_{ber} in s	Tatsächliche Zeit t_{tat} in s	Abweichung Δt_{rel} in %
Eingestellte Element- anzahl	Verwendete Element- anzahl	Eingestellte Element- anzahl	Verwendete Element- anzahl			
Rotationssymmetrie: Abstrahlgeometrie Linie						
20000	20000	20000	10001	37	36	3,9
20000	20000	40000	20001	74	71	4,2
20000	20000	80000	40001	149	144	3,4
20000	20000	120000	60001	223	214	4,3
40000	40000	20000	10001	74	72	3,3
40000	40000	40000	20001	149	144	3,5
40000	40000	80000	40001	298	285	4,5
40000	40000	120000	60001	446	428	4,3
80000	80000	20000	10001	149	154	-3,4
80000	80000	40000	20001	295	307	-2,9
80000	80000	80000	40001	595	620	-4,0
80000	80000	120000	60001	892	921	-3,1
120000	120000	20000	10001	223	246	3,4
Rotationssymmetrie: Abstrahlgeometrie Fläche						
1500	2250000	5500	2751	1103	1217	-9,4
1750	3062500	7500	3751	2047	2261	-9,5
3500	12250000	5500	2751	6344	6568	-3,4
5500	30250000	7500	3751	21361	22084	-3,3
Keine Rotationssymmetrie						
501	251001	501	251001	20314	20533	-1,1
276	76176	801	641601	15760	16812	-6,3

Tab i Vergleich der berechneten Berechnungsdauern mit den tatsächlich benötigten Berechnungsdauern

D Programmdokumentation

D 1 Dateiübersicht

Im Folgenden ist eine Übersicht der verwendeten Unterprogramme für Rotationssymmetrie zu finden. Da die meisten Unterprogramme für keine Rotationssymmetrie die gleichen Inhalte enthalten und zum Großteil noch unvollständig sind, wird auf deren Darlegung verzichtet.

ausgabe

Inhalt: Steuert die Ausgabedaten (elektrische Feldstärke, Phasenlage, Intensität, Strahlradien, Beugungserscheinungen, Export), Visualisierung der Intensität im Querschnitt

Wird aufgerufen von: *rechnungRot*

Ruft auf: *auswertung, Minima, Peaks, excel*

auswertung

Inhalt: Berechnung der Strahlradien, Erstellung der grafischen Darstellungen für elektrische Feldstärke, Phasenlage, Intensität, Strahlverlauf in xz- bzw. yz-Ebene und 3D-Strahlenverlauf

Wird aufgerufen von: *auswertung*

Ruft auf: *LeistungSektor, vorschauGrenz3D*

berechnung

Inhalt: Oberflächensteuerung des Reiters: Berechnung, Optionen für zusätzliche Abstrahlung in xz- bzw. yz-Ebene und Eingabe der Elementgröße oder der Elementanzahl für diese Abstrahlung

Wird aufgerufen von: *Benutzer*

Ruft auf: *rechnungRot, grossB*

ebenen

Inhalt: Berechnung der Abstrahlung in die xz- bzw. yz-Ebene

Wird aufgerufen von: *rechnungRot*

Ruft auf: —

element

Inhalt: Ausgabe der Elementanzahl einer Fläche, sowie den benötigten Speicherbedarf, die Anzahl der Sektoren und eine geschätzte Berechnungsdauer

Wird aufgerufen von: *Benutzer, startflaescheRot, grenzRot*

Ruft auf: –

excel

Inhalt: Export der Berechnungsdaten: elektrische Feldstärke, Phasenlage und Intensitätsverteilung jeweils des Querschnittes mit dazugehörigen radialen Koordinaten nach Excel

Wird aufgerufen von: *Benutzer*

Ruft auf: –

freezeColors

Inhalt: Funktion, welche es ermöglicht in der grafischen Darstellung verschiedene Objekte mit unterschiedlichen Farben zu füllen, wurde nicht selbst entwickelt, sondern von [MaWo2010] übernommen

Wird aufgerufen von: *berechnung*

Ruft auf: –

grossB

Inhalt: Erzeugt oder löscht die Oberflächenelemente von Berechnung

Wird aufgerufen von: *berechnung*

Ruft auf: –

grenzRot

Inhalt: Oberflächensteuerung des Reiters: Grenzfläche, Grenzflächenform, z-Koordinate, Begrenzung, Elementgröße und Brechzahl, 2D und 3D Vorschau, Strahlenoptische Abschätzung

Wird aufgerufen von: *Benutzer, rotation*

Ruft auf: *element, mehr, strahlenOpt, vorschauGrenz*

laden

Inhalt: Lädt die bereits eingegebenen Daten für die Laser-Parameter, Startfläche und Berechnung

Wird aufgerufen von: *rotation*

Ruft auf: —

laserRot

Inhalt: Oberflächensteuerung des Reiters: Laser-Parameter, Eingabe der Wellenlänge, Leistung/Intensität, Strahlprofil, Strahlradius, Möglichkeit zur Visualisierung der elektrischen Feldstärke und Intensität

Wird aufgerufen von: *Benutzer, rotation*

Ruft auf: *visu*

LeistungSektor

Inhalt: Aufsummierung der Einzelleistungen mithilfe von Sektoren

Wird aufgerufen von: *auswertung*

Ruft auf: —

loeschen

Inhalt: beim Umschalten zwischen den Reitern werden die Oberflächenelemente des vorherigen Reiters gelöscht

Wird aufgerufen von: *rotation*

Ruft auf: —

mehr

Inhalt: fügt zusätzliche Grenzflächen hinzu und steuert die Ansicht der vorhandenen Grenzflächen

Wird aufgerufen von: *Benutzer, grenzRot*

Ruft auf: —

Minima

Inhalt: Funktion, welche alle in der Intensitätsverteilung enthaltenen Minima findet, deren Intensität und den dazugehörigen Radius ausgibt

Wird aufgerufen von: *Benutzer, ausgabe*

Ruft auf: —

OptDar3D

Inhalt: Ermöglicht es die Ansicht der xy-, xz- und yz-Ebene an und aus zu schalten

Wird aufgerufen von: *Benutzer, ausgabe*

Ruft auf: –

Peaks

Inhalt: Funktion, welche alle in der Intensitätsverteilung enthaltenen Maxima findet, deren Intensität und den dazugehörigen Radius ausgibt

Wird aufgerufen von: *Benutzer, ausgabe*

Ruft auf: –

rechnungRot

Inhalt: Hauptfunktion, Erzeugung der Koordinaten (X,Y,Z), Erzeugung des Strahlprofils für Linienabstrahlung, Ausführung des Beugungsintegrals

Wird aufgerufen von: *Benutzer*

Ruft auf: *ausgabe, ebenen, Sektoren, speichern, visu*

rotation

Inhalt: Oberfläche für Berechnungen auf der Grundlage der Rotationssymmetrie, Koordination der Reiterauswahl

Wird aufgerufen von: *Benutzer*

Ruft auf: *laden, laserRot, loeschen, speichern, speichernGrenz, , startflaescheRot*

Sektoren

Inhalt: Koordinaten und elektrische Feldstärke werden als Sektoren erstellt

Wird aufgerufen von: *rechnungRot*

Ruft auf: –

speichern

Inhalt: speichert alle Eingabewerte der Laser-Parameter, Startfläche und Berechnung

Wird aufgerufen von: *rechnungRot, rotation, visu*

Ruft auf: –

speichernGrenz

Inhalt: speichert alle Eingabewerte der Grenzflächen

Wird aufgerufen von: *rotation*

Ruft auf: –

startflaescheRot

Inhalt: Oberflächensteuerung des Reiters: Startfläche, Startflächenform, z-Koordinate, Begrenzung, Elementgröße und Brechzahl

Wird aufgerufen von: *Benutzer, rotation*

Ruft auf: *element, vorschau, vorschauStart*

strahlenOpt

Inhalt: Strahlenoptische Abschätzung, gibt an jeder Grenzfläche den strahlenoptischen Strahlradius aus, die geometrische Daten aller Flächen sind direkt beeinflussbar und können automatisch übernommen werden, Strahlradius an jeder Stelle durch Cursor-Funktion berechenbar

Wird aufgerufen von: *Benutzer, grenzRot, StrahlenOptStart*

Ruft auf: *StrahlenOptStart*

strahlenOptStart

Inhalt: Verwendung einer eigenen Punktquelle oder Anpassung an Laserparameter, Anzahl der verwendeten Strahlen einstellbar

Wird aufgerufen von: *Benutzer, strahlenOpt*

Ruft auf: *StrahlenOpt*

visu

Inhalt: Darstellung der elektrischen Feldstärke und Intensitätsverteilung mit den gewählten Laser-Parametern, Erzeugung des Strahlprofiles für die Abstrahlgeometrie: Fläche ohne Sektorisierung

Wird aufgerufen von: *Benutzer, rechnungRot, laserRot*

Ruft auf: *speichern*

vorschau

Inhalt: Darstellung der Intensitätsverteilung der Startfläche und den Einfluss der gewählten Begrenzung auf diese

Wird aufgerufen von: *Benutzer, startflaescheRot*

Ruft auf: *speichern*

vorschauGrenz

Inhalt: 2D Darstellung aller gewählten Flächen

Wird aufgerufen von: *Benutzer, grenzRot*

Ruft auf: *speichernGrenz, vorschauGrenz3D*

vorschauGrenz3D

Inhalt: 3D Darstellung aller gewählten Flächen

Wird aufgerufen von: *vorschauGrenz*, *auswertung*

Ruft auf: –

vorschauStart

Inhalt: 3D Darstellung der Startfläche

Wird aufgerufen von: *Benutzer*, *startflaescheRot*

Ruft auf: –

D 2 Bedienung

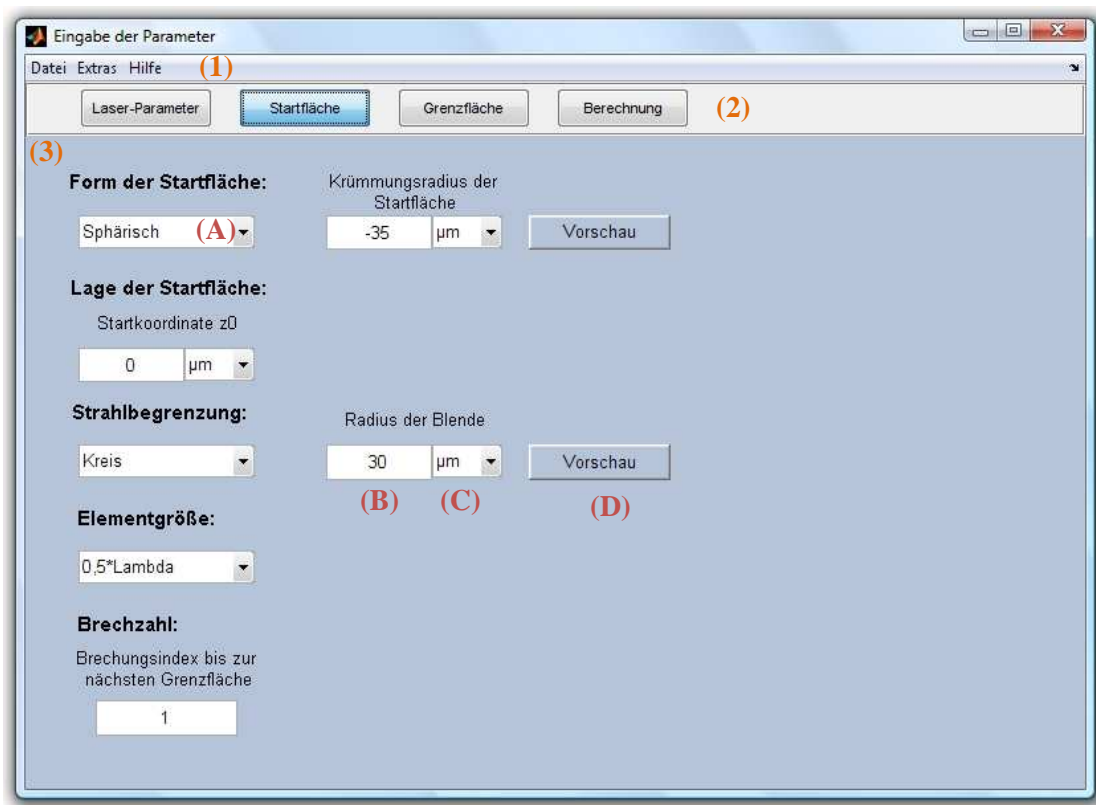


Abb i Programmoberfläche

Für eine bessere Handhabung der Bedienung durch den Benutzer wurde eine grafische Benutzeroberfläche, ein sogenanntes GUI (Graphical User Interface) erstellt. Zur Veranschaulichung wurde ein kleiner Ausschnitt der Oberfläche in **Abb i** dargestellt. Eine GUI ermöglicht dem Anwender eine bessere Interaktion. Aus Gründen der Übersicht und

Benutzerfreundlichkeit wurde der Programminhalt in verschiedene Unterfenster unterteilt. Letztere sind mithilfe der Navigationsleiste (2) steuer- und umschaltbar. Alle Unterfenster erscheinen in (3). Weiterhin steht noch eine Menüleiste (1) zur Verfügung die z. Z. über keine funktionsfähigen Inhalte verfügt.

Dem Benutzer stehen für die Eingabe vorgefertigte Popupmenüs (A) zur Verfügung. Durch diese kann er die gewünschte Einstellung durch eine Auswahl treffen. Jedes Element des Menüs bewirkt eine Veränderung auf der Oberfläche und erzeugt zur Auswahl gehörende Oberflächenelemente. Elemente von nichtselektierten Inhalten werden gelöscht. Der Benutzer hat die Aufgabe in die entstandenen Elemente, z.B. Textfelder (B), die benötigten Werte einzugeben. Dezimalzahlen werden mit einem Punkt anstelle eines Kommas eingegeben. Diese Einschränkung soll in den weiteren Programmversionen behoben werden. Zu jeder einzugebenden Größe wurde ein Popupmenü (C) hinzugefügt, welches die dazugehörigen Einheiten enthält. Dadurch ist es nicht notwendig die Eingaben in Exponentialschreibweise vorzunehmen. Diese Option steht jedoch auch weiterhin zur Verfügung. Für viele Eingaben ist eine Vorschau sehr hilfreich. Deshalb sind an vielen Stellen Vorschaumöglichkeiten oder weitere Unterfunktionen implementiert. Sie werden durch einen Klick auf die Buttons (D) ausgelöst.

Laser-Parameter

Zur Berechnung der Propagation eines Laserstrahls sind zunächst Eingaben über die Strahlquelle erforderlich. Diese Eingaben werden im Untermenü Laser-Parameter vorgenommen. Die dazu benötigten Parameter wurden in **Tab ii** und **Tab iii** zusammengefasst. Eine Übersicht der verwendeten Formel und deren Umsetzung im Quellcode ist unter **D 3** zu finden.

Laser-Parameter Rotationssymmetrie		
Wellenlänge λ	Maximale Intensität I_0 oder Im Strahlprofil enthaltene Leistung P	Intensitätsverteilung mit dazugehörigen Strahlradius: <ul style="list-style-type: none"> • Gaußstrahl w_{86} • Top-Hat (Gauß) w_{95} • Top-Hat (ideal) w_{100} • Sphärischer Resonator w_{σ}

Tab ii Übersicht der Eingabemöglichkeiten der Laser-Parameter für Rotationssymmetrie

Laser-Parameter Rotationssymmetrie		
Wellenlänge λ	Maximale Intensität I_0 oder Im Strahlprofil enthaltene Leistung P	Intensitätsverteilung mit dazugehörigen Strahlradius: <ul style="list-style-type: none"> • Gaußstrahl w_{86} • Top-Hat (Gauß) w_{95} • Top-Hat (ideal) w_{100} • Sphärischer Resonator w_σ
Mittelpunkt der Strahlquelle ($x_{laser}; y_{laser}$)		

Tab iii Übersicht der Eingabemöglichkeiten der Laser-Parameter für keine Rotationssymmetrie

Startfläche

Die Parameter der Startfläche werden zur vollständigen Beschreibung der Strahlquelle benötigt. Die Form der Startfläche, deren absolute z-Koordinate, eine Begrenzung, die Elementgröße und die Brechzahl müssen eingegeben werden. Im Unterschied zur Rotationssymmetrie sind bei keiner Rotationssymmetrie alle Flächen beliebig verschieb- und drehbar. Eine beliebige Lage der Flächen im Raum ist möglich. Eine Übersicht, welche Eingaben vorgenommen werden müssen, sind in **Tab iv** und **Tab v** zu finden. Anzumerken ist, dass die momentane Beschreibung der Oberfläche noch nicht ausgereift ist. Eine Verbesserung der Handhabung und Beschreibung wird in einer späteren Programmversion angestrebt.

Startfläche Rotationssymmetrie			
Oberflächenform: <ul style="list-style-type: none"> • Ebene • Sphärisch • Parabolisch • Hyperbolisch • Elliptisch • Axikon 	Lage der Oberfläche: <ul style="list-style-type: none"> • Startkoordinate z_0 	Strahlbegrenzung <ul style="list-style-type: none"> • Kreis • Ring 	Elementgröße: <ul style="list-style-type: none"> • Lambda • 2 · Lambda • 0,5 · Lambda • Manueller Abstand • Manuelle Elementanzahl
Brechzahl			

Tab iv Übersicht der Eingabemöglichkeiten der Parameter der Startfläche für Rotationssymmetrie

Startfläche keine Rotationssymmetrie			
Oberflächenform: <ul style="list-style-type: none"> • Ebene • Sphärisch • Parabolisch • Hyperbolisch • Elliptisch • Axikon 	Lage der Oberfläche: <ul style="list-style-type: none"> • Startkoordinate z_0 • Verkippungen: Vertikal und horizontal 	Strahlbegrenzung <ul style="list-style-type: none"> • Kreis • Ring • Rechteck Mittelpunkt der Begrenzung: $x_{MitteBegr}$ $y_{MitteBegr}$	Elementgröße: <ul style="list-style-type: none"> • Lambda • $2 \cdot \text{Lambda}$ • $0,5 \cdot \text{Lambda}$ • Manueller Abstand • Manuelle Elementanzahl
Brechzahl			

Tab v Übersicht der Eingabemöglichkeiten der Parameter der Startfläche für keine Rotationssymmetrie

Grenzflächen

Die Eingabe der Parameter der Grenzfläche erfolgt analog der Eingabe der Parameter der Startfläche. Die Oberfläche der Grenzfläche enthält jedoch noch ein einige zusätzliche Eingabemöglichkeiten, die in **Abb ii** dargestellt sind. Der Benutzer kann durch einen Klick auf den Button: Grenzfläche hinzufügen (4) beliebig viele weitere Grenzflächen hinzufügen. Die letzte Grenzfläche wird als Schirm betrachtet. Die Eingabeparameter sind für jede Grenzfläche die Gleichen. Die Anzahl der Grenzflächen ist nicht begrenzt, jedoch steigt mit der Anzahl der Grenzflächen auch die benötigte Berechnungsdauer.

Durch die Auflistung aller vorhandenen Grenzflächen am rechten Rand (6) besteht die Möglichkeiten zwischen den einzelnen Grenzflächen beliebig hin und her zu schalten. Alle Eingaben werden bei einem Umschalten gespeichert und die bereits eingegebenen Parameter der gewählten Grenzfläche werden geladen. Am rechten Rand werden maximal 10 Grenzflächen angezeigt. Durch Auswahl am Popupmenü (7) werden die nächsten 10 Grenzflächen angezeigt. Die zuletzt hinzugefügte Grenzfläche kann durch einen Klick auf den Button: letzte Grenzfläche löschen (5) wieder gelöscht werden. Ein beliebiges Vertauschen der Grenzflächen untereinander oder Löschen einer beliebigen Grenzfläche ist noch nicht möglich. Diese Möglichkeit wird in den weiteren Programmversionen angestrebt.

Eingabe der Parameter

Datei Extras Hilfe

Laser-Parameter Startfläche Grenzfläche Berechnung (5) (4)

letzte Grenzfläche löschen Grenzfläche hinzufügen

Form der Grenzfläche: Krümmungsradius der Startfläche
 Sphärisch 1 mm

Lage der Grenzfläche: Schnittstelle mit optischer Achse zi
 5 mm

Strahlbegrenzung: Radius des Kreises
 Kreis 700 µm

Elementgröße:
 0,5*Lambda

Brechzahl: Brechungsindex bis zur nächsten Grenzfläche
 1.5

Abstrahlgeometrie:
 Linie

Vorschau (6)

Strahlenoptische Abschätzung (8)

Elementanzahl

1. Grenzfläche
 2. Grenzfläche
 3. Grenzfläche
 4. Grenzfläche
 5. Grenzfläche
 6. Grenzfläche
 7. Grenzfläche
 8. Grenzfläche
 9. Grenzfläche
 10. Grenzfläche

Seite 1 (7)

Abb ii Eingabemöglichkeiten für Grenzflächen

In den meisten Fällen kennt der Benutzer nicht alle Angaben, die für die Berechnung notwendig. Dazu gehört z. B. die benötigte Ausdehnung der Grenzfläche. Für diesen Fall wurde eine strahlenoptische Abschätzung implementiert, die durch eine entsprechende Schaltfläche (8) geöffnet werden kann. Durch Betätigen des Buttons öffnet sich ein neues Fenster in welchem eine zweidimensionale Abschätzung des Berechnungsergebnisses durch die Gesetze der geometrischen Optik erfolgt (siehe **Abb iii**).

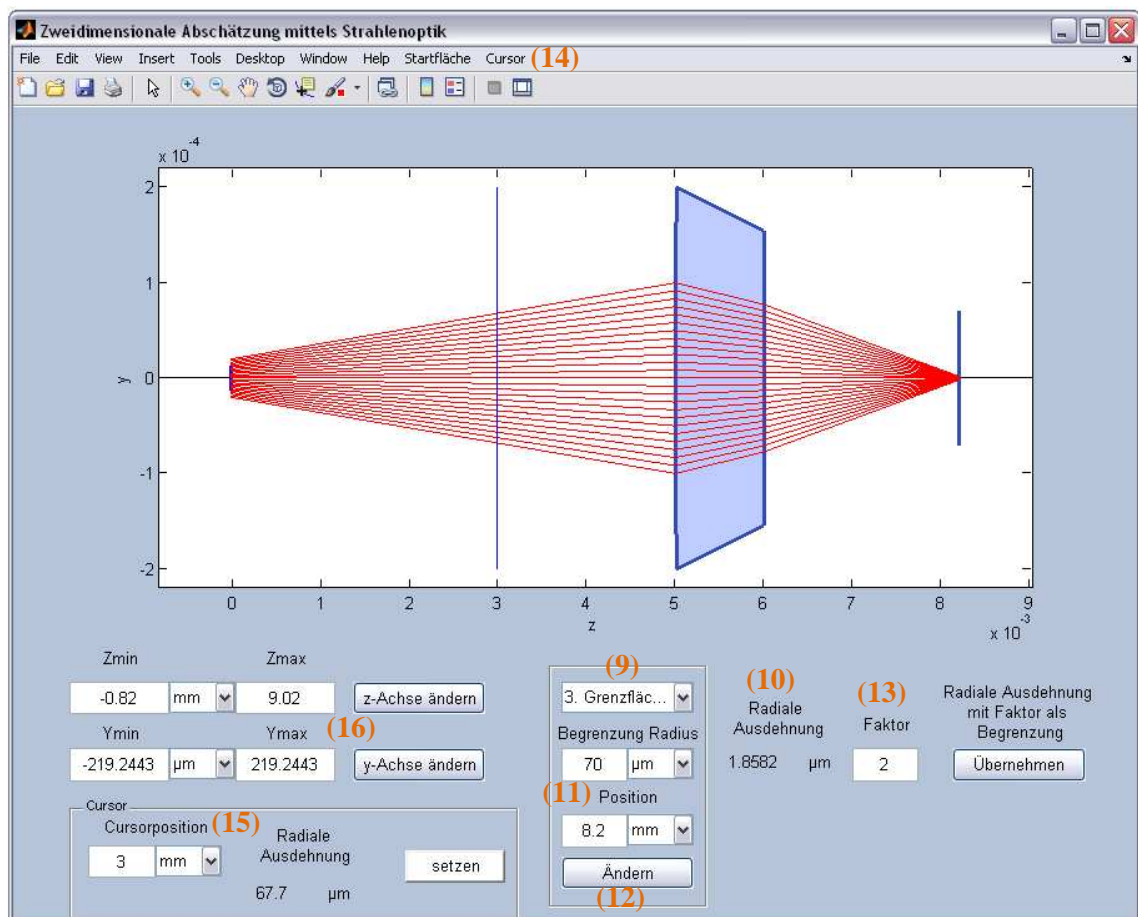


Abb iii Strahlenoptische Abschätzung

Ausgehend von den gewählten Parametern wird der Strahlenverlauf strahlenoptisch berechnet und grafisch dargestellt. Stimmt der Strahlenverlauf nicht mit dem zu erwartenden Ergebnis überein oder sind die Parameter ungünstig gewählt, so gibt es die Möglichkeit die gewählten Parameter für Begrenzung und Position aller Flächen direkt zu beeinflussen. Dazu muss zunächst die gewünschte Fläche im Popupmenü (9) auswählen werden. An jeder Fläche wird die tatsächliche strahlenoptische Ausdehnung angezeigt (10). Der Benutzer kann nun die im Vorfeld vorgenommenen Eingaben (11) selbst ändern mit (12) oder die Ausdehnung automatisch mit einem selbst gewählten Faktor (13) übernehmen. Dabei hat sich der Faktor 2 als sehr gute Näherung der strahlenoptischen zu den wellenoptischen Betrachtungen heraus gestellt. Ein kleinerer Faktor würde Beugungseffekte hervorrufen.

Neben den bereits auf der Oberfläche vorhandenen Elementen, stehen dem Benutzer noch Elemente in der Menüleiste (14) zur Verfügung. Neben den standartmäßig von MATLAB vorhandenen Elementen wurden noch die Punkte: Startfläche und Cursor, hinzugefügt. Durch einen Klick auf Startfläche können weitere Einstellungen vorgenommen werden. Dazu gehören die Anzahl der verwendeten Strahlen sowie die Strahlquelleneinstellungen. Der Benutzer kann

selbst entscheiden, ob er eine Anpassung an die Laserparameter wünscht oder eine eigene definierte Punktquelle verwenden möchte. Für eine anschließende wellenoptische Berechnung ist eine Anpassung an die Laserparameter zu empfehlen. Möchte der Benutzer auch Strahlausdehnungen außerhalb der Grenzflächen wissen, z.B. zur manuellen Fokussuche, so kann er den Cursor (14) aktivieren. Durch die Aktivierung werden der Oberfläche weitere Elemente (15) hinzugefügt. Durch Eingabe der gewünschten Position im Bedienfeld des Cursors (15) wird der Cursor durch Betätigen des Buttons: setzen, an die gewünschte Position gesetzt und der Strahlradius an dieser Stelle ausgegeben.

Gefällt dem Benutzer der voreingestellte Bildschirmausschnitt nicht oder möchte er einen Ausschnitt näher betrachten, so kann er diesen mithilfe der Elemente von (16) frei wählen.

Berechnung

Sind alle Eingaben vollzogen, kann der Benutzer noch zusätzliche Berechnungen, wie die Abstrahlung in die xz- bzw. die yz-Ebene auswählen. Er entscheidet, ob er die Elementgröße oder die Anzahl der Elemente in x- bzw. y-Richtung und z-Richtung eingeben möchte. Da diese Fläche nicht für ein erneutes Abstrahlen verwendet wird, kann eine relativ große Elementgröße gewählt werden. Für die meisten Anwendungsfälle sind 100 bis 300 Elemente in x- bzw. y-Richtung und 1000 bis 3000 Elemente in z-Richtung ausreichend um den Strahlverlauf in der Ebene verfolgen zu können.

D 3 Verwendete Formeln

D 3.1 Strahlprofile

Gaußstrahl

Ein gaußförmiger Verlauf der elektrischen Feldstärke mit dem Maximum an der Stelle $r = 0$ kann mit Angabe der Amplitude E_0 und des Strahlradius w_{86} erzeugt werden. Aus den x- und y-Koordinaten wird über $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ die radiale Koordinate bestimmt.

$$E = E_0 \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{w_{86}^2}\right)$$

Top-Hat (Gauß)

Für Top-Hat und Top-Hat-ähnliche Profile wird i.d.R. eine Angabe des Strahlradius auf der Basis von 95% Leistungseinschluss angegeben. Dieser Radius muss zunächst in den gaußschen Strahlradius umgerechnet werden, da die Grundfunktion zur Erzeugung einer gaußschen Glockenkurve ist. Dies geschieht über $w_{86} = \frac{w_{95}}{\sqrt{1-0,5 \cdot \log 0,15}}$. Anschließend wird eine gaußförmige Feldstärkeverteilung erzeugt. Da das Maximum der Top-Hat Verteilung mit dem 1/e-ten Abfall der ursprünglichen Funktion übereinstimmen soll, wird die Amplitude mit der eulerschen Zahl e multipliziert. Die erzeugende Funktion lautet somit:

$$E = E_0 \cdot e \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{w_{86}^2}\right)$$

Von dieser Funktion muss nun die Spitze an der Stelle des 1/e-ten Abfalles der Amplitude abgeschnitten werden. Dazu wird zunächst eine Matrix A erstellt, welche überall eine 1 enthält, an denen die Feldstärke kleiner als E_0 ist und an den übrigen Stellen den Wert 0 annimmt.

$$A = E \leq E_0$$

Weiterhin wird eine Matrix B benötigt, welche an Stellen, an denen A die Werte 0 enthält den Wert E_0 besitzt.

$$B = (1 - A) \cdot E_0$$

Zum besseren Verständnis wurden die beiden Gebiete, welche durch die Matrizen A und B repräsentiert werden in **Abb iv** dargestellt.

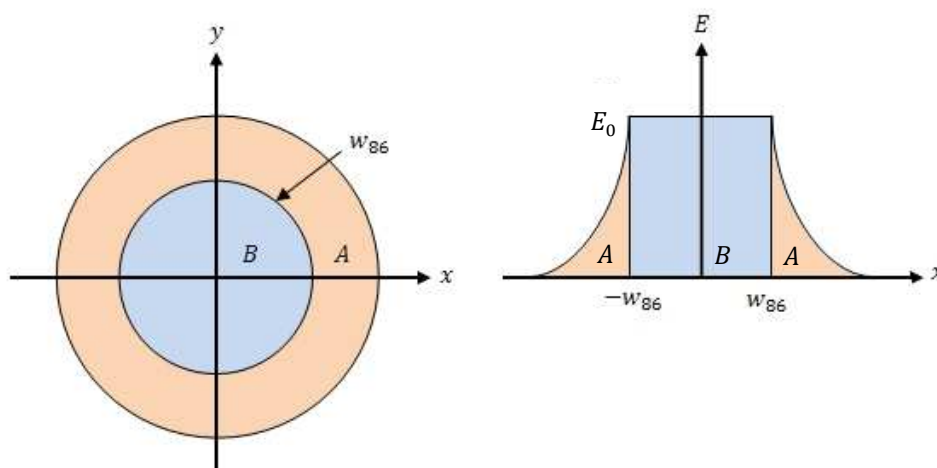


Abb iv Schematische Darstellung der Gebiete, die zur Erstellung eines Top-Hat Profils benötigt werden

Die Matrix E muss nun noch mit den Matrizen A und B verknüpft werden, um das endgültige Strahlprofil zu erhalten. Dabei stehen die „“-Operationen in MATLAB zur Verfügung.

$$E = E \cdot A + B$$

Top-Hat (ideal)

Ein ideales Top-Hat Profil lässt sich durch die Kenntnis der Amplitude E_0 und des Strahlradius w_{100} erzeugen. An dieser Stelle wird eine Hilfsmatrix A benötigt, welche dafür sorgt, dass dem Gebiet, welches außerhalb des Strahlradius w_{100} liegt, der Feldstärkewert 0 zugeordnet wird. Die radiale Koordinate wird wieder durch $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ berechnet.

$$A = r \leq w_{100}$$

$$E = E_0 \cdot \text{ones}(nx, nx) \cdot A$$

Der Befehl `ones(nx,nx)` erzeugt eine Matrix, die nur Einsen enthält und die Dimension (nx, nx) besitzt.

Sphärischer Resonator

Moden des sphärischen Resonators werden mithilfe der Gauß-Laguerre-Moden (2-45) erzeugt. Dabei müssen zunächst die laguerreschen Polynome (2-44) berechnet werden. Weiterhin ist zur Erzeugung der Strahlradius des Grundmodes notwendig. Dieser lässt sich aus dem 2. Moment wie folgt berechnen:

$$w_0 = \frac{w_\sigma}{\sqrt{2p + l + 1}}$$

Anzumerken ist an dieser Stelle, dass diese Beziehung nur für $l \neq 1$ gilt. Ein Beweis oder eine Formel wie für den Strahlradius der Gauß-Hermite-Moden unter Anlagen **B** konnte nicht durchgeführt werden. Der Grund ist, dass in der Literatur keine passenden Orthogonalitätsrelationen gefunden wurden.

Für die Umsetzung von (2-44) müssen einige Fakultäten gebildet werden. Diese lassen sich mithilfe des Befehls *factorial(x)* erzeugt, z.B. $p!$:

$$pFakultat = factorial(p);$$

Weiterhin wird das Verhältnis $\frac{2 \cdot r^2}{w_0^2}$ durch u substituiert.

Die laguerreschen Polynome werden mit einer for-Schleife erzeugt. Das erste Glied muss separat vordefiniert werden. Jedes Polynom wird als Matrix der Dimension (nx, nx) generiert.

$$L = ones(nx, nx) \cdot \frac{(p+l)!}{p! \cdot l!}$$

$$for \ t = 1:p, \quad L = L + \frac{(-u)^t \cdot (p+l)!}{(p+l)! \cdot (p+l)! \cdot t!}; \quad end;$$

Schließlich muss die Phase φ und der Normierungsfaktor, hier als f bezeichnet, erzeugt werden.

$$\varphi = \arctan2 \frac{y}{x}$$

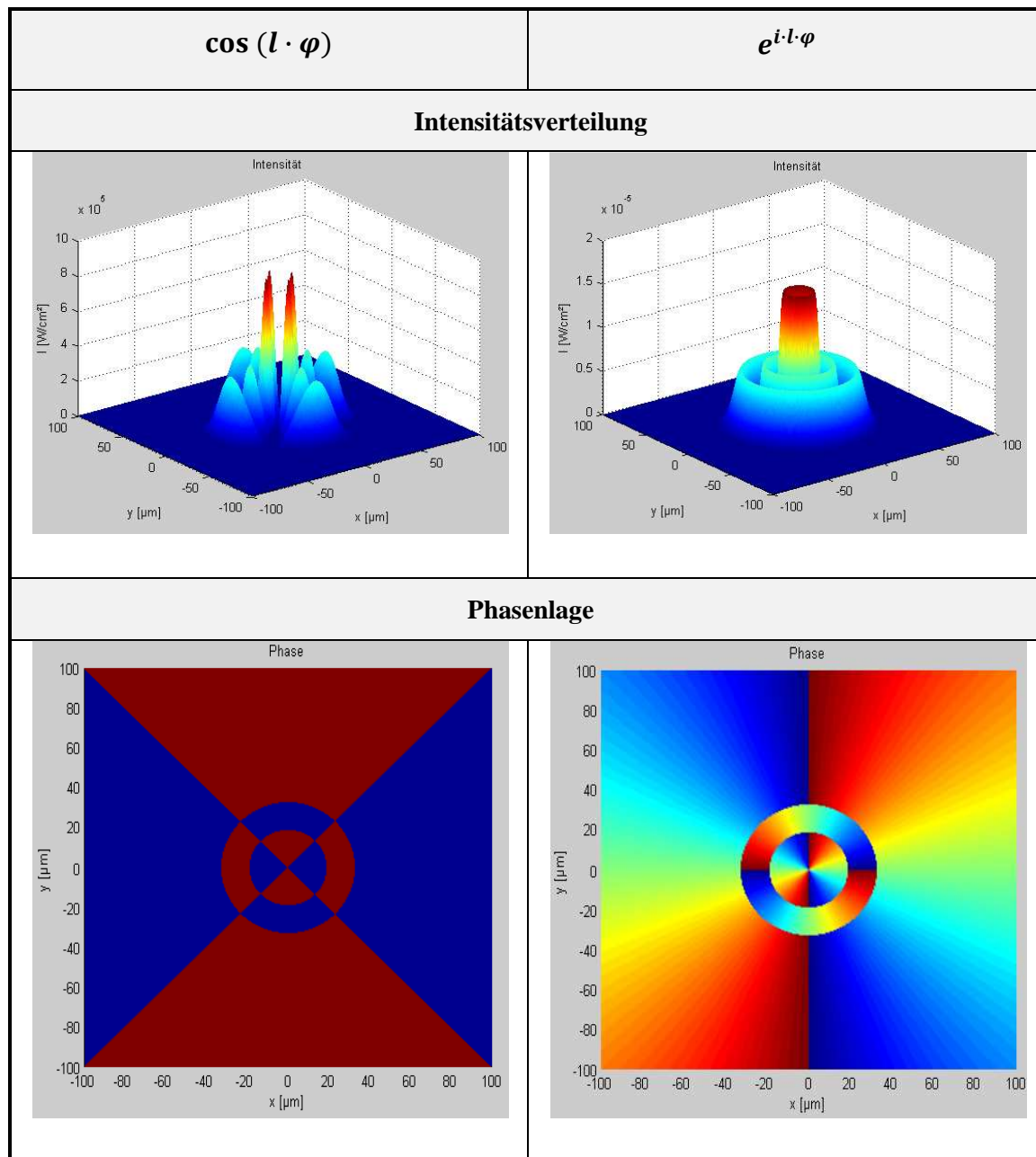
$$f = \sqrt{\frac{2 \cdot p!}{\pi \cdot (p+l)!}}$$

Die Funktion *arctan2* ist eine in MATLAB verfügbare Funktion, welche dem Azimuwinkel automatisch das richtige Vorzeichen zuordnet.

Die endgültige Feldstärke ergibt sich aus:

$$E = E_0 \cdot f \cdot (\sqrt{u} \cdot l) \cdot L \cdot \exp\left(-\frac{u}{2}\right) \cdot \cos(l \cdot \varphi)$$

Auch für \sqrt{u}^l muss eine „-Operation verwendet werden, da es sich bei u um eine Matrix handelt. In der Literatur wird statt $\cos(l \cdot \varphi)$ der Ausdruck $e^{i \cdot l \cdot \varphi}$ verwendet. Durch diesen Ausdruck ergibt sich eine abschnittsweise stetige und in diesen Abschnitten kontinuierlich steigende Phasenverteilung. Diese führt dazu, dass das Strahlprofil bei der freien Propagation nicht mehr invariant ist. Weiterhin sind keine azimuthalen Nullstellen bei Bildung der Intensität mehr vorhanden. Zur Visualisierung wurde dieses Problem in **Tab vi** dargestellt.



Tab vi Vergleich der erzeugten Intensitäten und Phasenlage bei Gauß-Laguerre-Moden mit $\cos(l \cdot \varphi)$ und $e^{i \cdot l \cdot \varphi}$; gewählte Größen: $l = 2$, $p = 2$, $w_0 = 50 \mu m$, $P = 10 W$

Rechteckiger Resonator

Die Moden des rechteckigen Resonators werden mithilfe der Gauß-Hermite-Moden (2-41) beschrieben. Für deren Bildung sind die hermiteschen Polynome (2-40) notwendig. Zunächst muss der Radius der Mode höherer Ordnung auf der Basis des 2. Moments wieder in den Radius des Grundmodes umgerechnet werden. Da bei diesem Resonatortyp astigmatische Strahlen möglich sind, können sich die Radien in x- und y-Richtung unterscheiden.

$$w_{0x} = \frac{w_{\sigma x}}{\sqrt{2m+1}} \quad w_{0y} = \frac{w_{\sigma y}}{\sqrt{2n+1}}$$

Weiterhin erfolgen die Substitutionen:

$$u_x = \sqrt{2} \frac{x}{w_{0x}} \quad u_y = \sqrt{2} \frac{y}{w_{0y}}$$

Die Berechnung der hermiteschen Polynome ist durch die rekursive Darstellung **(2-40)** gegeben. Daher müssen die ersten beiden Glieder separat berechnet werden. Zunächst wird jeweils eine Matrix der Dimension (m, nx) bzw. (n, ny) erzeugt, welche nur Einsen enthält. Jede Zeile der Matrix stellt einen Grad des Polynoms dar.

$$H_x = \text{ones}(m, nx) \quad H_y = \text{ones}(n, ny)$$

$$H_x(2, :) = 2 \cdot u_x \quad H_y(2, :) = 2 \cdot u_y$$

Die Grade höherer Ordnung müssen durch mithilfe einer for-Schleife erzeugt werden:

$$\text{for } t = 3:m+1 \quad H_x(t, :) = 2 \cdot (u_x \cdot H_x(t-1, :) - (t-2) \cdot H_x(t-2, :)); \quad \text{end};$$

$$\text{for } t = 3:n+1 \quad H_y(t, :) = 2 \cdot (u_y \cdot H_y(t-1, :) - (t-2) \cdot H_y(t-2, :)); \quad \text{end};$$

Weiterhin müssen noch $m!$ und $n!$ berechnet werden und aus der letzten Zeile, welche das Polynom höchster Ordnung darstellt, muss eine Matrix erstellt werden.

$$H_x = \text{ones}(ny, 1) \cdot H_x(m+1, :) \quad H_y = H_y(n+1, :)' \cdot \text{ones}(1, nx)$$

Durch den Befehl „`'`“ erfolgt das Transponieren des Vektors bzw. der Matrix.

Der Normierungsfaktor f berechnet sich aus:

$$f = \sqrt{\frac{1}{2^{m+n} \cdot m! \cdot n! \cdot \pi}}$$

Die resultierende elektrische Feldstärke setzt sich aus den einzelnen Faktoren wie folgt zusammen:

$$E = E_0 \cdot f \cdot H_x \cdot H_y \cdot \exp\left(-\frac{X_0.^2}{w_{0x}^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{Y_0.^2}{w_{0y}^2}\right)$$

D 3.2 Maximale Intensität und enthaltene Leistung

Zur Erzeugung des Strahlprofiles ist die Angabe der Amplitude E_0 notwendig. Diese berechnet sich aus der Angabe der maximalen Intensität durch:

$$E_0 = Z_w \cdot \sqrt{I_0}$$

Für die Strahlprofile Gaußstrahl, Top-Hat (Gauß) und Top-Hat (ideal) stimmt die eingegebene Amplitude auch mit der Amplitude überein, welche tatsächlich erzeugt wird. Bei Moden höherer Ordnung ist dies nicht mehr der Fall. Daher müssen diese neu skaliert werden. Zunächst wird die elektrische Feldstärke über den gesamten Strahlquerschnitt durch ihr Maximum geteilt und anschließend mit der gewünschten Amplitude multipliziert.

$$E = \frac{E}{\max(\max(E))} \cdot E_0$$

Da es sich bei E um eine Matrix der Dimension (ny, nx) handelt, muss das Maximum durch doppeltes Anwenden des Befehles `max()` ermittelt werden. Durch einfaches Anwenden von `max()` würde nur das Maximum einer Spalte berechnet werden.

In den meisten Fällen ist die Amplitude jedoch nicht bekannt. Durch Messungen ist bekannt, wie viel Leistung im Strahlprofil enthalten ist. Bei Auswahl dieser Option muss die Feldstärke mit dem Verhältnis aus gewünschter und tatsächlich enthaltener Leistung multipliziert werden. Da es sich um die elektrische Feldstärke handelt, muss aus dem Verhältnis noch die Wurzel gezogen werden.

$$E = E \cdot \sqrt{\frac{P}{\sum \left(\sum \left(\frac{E.^2}{Z_w} \cdot x_{0s} \cdot y_{0s} \right) \right)}}$$

D 3.3 Strahlenoptische Berechnungen

Die strahlenoptischen Berechnungen werden auf der Grundlage von Geradengleichungen der Form $y = m_S \cdot z + n_y$ für die Strahlen und Funktionsgleichungen, welche die Oberfläche der Grenzflächen beschreiben, durchgeführt. Die Berechnungen können zweidimensional in der yz-Ebene durchgeführt werden, da es sich um rotationssymmetrische Strahlprofile handelt. Eine allgemeine dreidimensionale Berechnung ist noch nicht möglich.

Von den beiden Funktionen (Strahl und Grenzfläche) wird der Schnittpunkt $P(z_{SP}; y_{SP})$ ermittelt. Anschließend wird der Anstieg der Tangente und Normalen in diesem Schnittpunkt bestimmt und das Brechungsgesetz in Vektorschreibweise (3-9) angewandt. Im Folgenden werden die einzelnen Berechnungsalgorithmen für die verfügbaren Oberflächenformen dargelegt und erläutert. Die Oberflächenfunktionen werden fortan als y_O bezeichnet.

In allen Berechnungen wird zuerst die Schnittstelle z_{SP} ermittelt. Der dazugehörige Funktionswert y_{SP} wird immer durch Einsetzen der Schnittstelle in $y = m_S \cdot z + n_y$ berechnet. Daher wird diese Berechnung im Weiteren nicht jedes Mal explizit aufgeführt.

Zur Ausführung des Brechungsgesetzes in Vektorschreibweise werden die Richtungsvektoren der Tangente und Normale im Schnittpunkt, sowie der Richtungsvektor des Strahls benötigt. Diese ergeben sich aus:

$$\begin{array}{l} \text{Richtungsvektor} \\ \text{Tangente} \end{array} \quad \vec{r}_T = \begin{pmatrix} r_{Tz} \\ r_{Ty} \\ r_{Tx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y_O' \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{Richtungsvektor} \\ \text{Normale} \end{array} \quad \vec{r}_N = \begin{pmatrix} r_{Nz} \\ r_{Ny} \\ r_{Nx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_O' \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{Richtungsvektor} \\ \text{Strahl} \end{array} \quad \vec{r}_S = \begin{pmatrix} r_{Sz} \\ r_{Sy} \\ r_{Sx} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ m_S \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{Richtungsvektor} \\ \text{gebrochener Strahl} \end{array} \quad \vec{r}_S' = \begin{pmatrix} r_{Sz}' \\ r_{Sy}' \\ r_{Sx}' \end{pmatrix}$$

Die Angabe von drei Koordinaten ist notwendig, da vorgefertigte MATLAB-Funktionen zur Berechnung des Vektorproduktes und der Beträge der Vektoren verwendet werden. Die Negation des Richtungsvektors des Strahls ist notwendig um den Einfallswinkel zu berechnen.

Durch Verwendung der ursprünglichen Richtung würde der Nebenwinkel des Einfallswinkels berechnet werden.

Die Geradengleichung des gebrochenen Strahles lautet:

$$y = m'_S \cdot z + n_y'$$

Die beiden Parameter werden bestimmt aus:

$$m'_S = \frac{r'_{Sy}}{r'_{Sz}} \qquad n_y' = y_{SP} - m'_S \cdot z_{SP}$$

Ebene

Beschreibung:

$$y_O = z_i$$

Schnittstelle:

$$z_{SP} = z_i$$

Anstieg der Tangente:

$$y_O' = 1$$

Richtung des gebrochenen Strahles:

$$\vec{r}'_S = k \cdot \frac{\vec{r}_T}{|\vec{r}_T|} + \text{sgn}(r_y) \cdot \sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{\vec{r}_N}{|\vec{r}_N|}$$

Sphäre

Beschreibung:

$$y_0^2 + (z - z_i - R_i)^2 = R_i^2$$

$$y_O = \pm \sqrt{R_i^2 - (z - z_i - R_i)^2}$$

Schnittstelle:

$$d = z_i + R_i$$

$$p = \frac{2 \cdot (m_s \cdot n_y - d)}{m_s^2 + 1}$$

$$q = \frac{n_y^2 + d^2 - R_i^2}{m_s^2 + 1}$$

$$z_{SP1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

If $R_i > 0$, $z_{SP} = \min(z_{SP1}, z_{SP2})$;

else $z_{SP} = \max(z_{SP1}, z_{SP2})$; end;

Anstieg der Tangente:

$$y_o' = \operatorname{sgn}(y_{SP}) \cdot \frac{d - z_{SP}}{\sqrt{R_i^2 - (z_{SP} - d)^2}}$$

Richtung des gebrochenen Strahles:

$$\vec{r}_S' = k \cdot \frac{\vec{r}_T}{|\vec{r}_T|} - \operatorname{sgn}(R_i \cdot y_{SP}) \cdot \sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{\vec{r}_N}{|\vec{r}_N|}$$

Paraboloid

Beschreibung:

$$2(z - z_i) = \frac{y_0^2}{a_i^2}$$

$$y_0 = \pm a_i \sqrt{2(z - z_i)}$$

Schnittstelle:

$$p = \frac{2 \cdot (m_s \cdot n_y - \operatorname{sgn}(a_i) \cdot a_i^2)}{m_s^2}$$

$$q = \frac{n_y^2 + 2 \cdot \operatorname{sgn}(a_i) \cdot a_i^2 \cdot z_i}{m_s^2}$$

$$z_{SP1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

If $a_i > 0$, $z_{SP} = \min(z_{SP1}, z_{SP2});$

else $z_{SP} = \max(z_{SP1}, z_{SP2});$ *end*;

Anstieg der Tangente:

$$y_o' = \operatorname{sgn}(y_{SP}) \cdot \frac{a_i}{\sqrt{2 \cdot \operatorname{sgn}(a_i) \cdot (z_{SP} - z_i)}}$$

Richtung des gebrochenen Strahles:

$$\vec{r}_S' = k \cdot \frac{\vec{r}_T}{|\vec{r}_T|} - \operatorname{sgn}(a \cdot y_{SP}) \cdot \sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{\vec{r}_N}{|\vec{r}_N|}$$

Zweischaliges Hyperboloid

Zur Beschreibung einer hyperbolisch gekrümmten Oberfläche wurde ein zweischaliges Hyperboloid verwendet, welches durch eine Verschiebung die z-Achse an der Stelle z_1 schneidet. Nur eine Schale des Hyperboloids wird betrachtet.

Beschreibung:

$$\frac{y_o^2}{a_i^2} - \frac{(z - z_1 + c_i)^2}{c_i^2} = -1$$

$$y_o = \pm a_i \sqrt{\frac{(z - z_1 + c_i)^2}{c_i^2} - 1}$$

Schnittstelle:

$$d = c - z_i$$

$$e = \frac{a_i^2}{c_i^2}$$

$$p = \frac{2 \cdot (d \cdot e - m_s \cdot n_y)}{e - m_s^2}$$

$$q = \frac{e \cdot d^2 - n_y^2 - a_i^2}{e - m_S^2}$$

$$z_{SP1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

If $c_i > 0$, $z_{SP} = \max(z_{SP1}, z_{SP2})$;

else $z_{SP} = \min(z_{SP1}, z_{SP2})$; end;

Anstieg der Tangente:

$$y_O' = \operatorname{sgn}(y_{SP}) \cdot \frac{e \cdot (z_{SP} + d)}{\sqrt{e \cdot (z_{SP} + d)^2 - a_i^2}}$$

Richtung des gebrochenen Strahles:

$$\vec{r}_S' = k \cdot \frac{\vec{r}_T}{|\vec{r}_T|} - \operatorname{sgn}(c \cdot y_{SP}) \cdot \sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{\vec{r}_N}{|\vec{r}_N|}$$

Ellipsoid

Beschreibung:

$$\frac{y_0^2}{a_i^2} + \frac{(z - z_1 - c_i)^2}{c_i^2} = 1$$

$$y_O = \pm c_i \sqrt{1 - \frac{(z - z_1 - c_i)^2}{c_i^2}}$$

Schnittstelle:

$$d = c_i + z_i$$

$$e = \frac{a_i^2}{c_i^2}$$

$$p = \frac{2 \cdot (m_S \cdot n_y - e \cdot d)}{m_S^2 + e}$$

$$q = \frac{n_y^2 - a_i^2 + e \cdot d^2}{m_s^2 + e}$$

$$z_{SP1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

If $c_i > 0$, $z_{SP} = \min(z_{SP1}, z_{SP2})$;

else $z_{SP} = \max(z_{SP1}, z_{SP2})$; end;

Anstieg der Tangente:

$$y'_O = -\operatorname{sgn}(y_{SP}) \cdot \frac{e \cdot (z_{SP} - d)}{\sqrt{a_i^2 - e \cdot (z_{SP} - d)^2}}$$

Richtung des gebrochenen Strahles:

$$\vec{r}'_S = k \cdot \frac{\vec{r}_T}{|\vec{r}_T|} - \operatorname{sgn}(c \cdot y_{SP}) \cdot \sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{\vec{r}_N}{|\vec{r}_N|}$$

Axikon (Gerader Kreiskegel)

Beschreibung:

$$y_0^2 - (z - z_i)^2 \cdot \tan^2 \alpha_i = 0$$

$$y_0 = \pm \tan \alpha_i \cdot (z - z_i)$$

Schnittstelle:

$$z_{SP1/2} = \frac{n_y + z_i \cdot \tan \alpha_i}{\pm \tan \alpha_i - m}$$

If $\tan \alpha_i > 0$, $z_{SP} = \max(z_{SP1}, z_{SP2})$;

else $z_{SP} = \min(z_{SP1}, z_{SP2})$; end;

Anstieg der Tangente:

$$y'_O = -\operatorname{sgn}(y_{SP}) \cdot \tan \alpha_i$$

Richtung des gebrochenen Strahles:

$$\vec{r}'_S = k \cdot \frac{\vec{r}_T}{|\vec{r}_T|} - \operatorname{sgn}(\tan \alpha \cdot y_{SP}) \cdot \sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{\vec{r}_N}{|\vec{r}_N|}$$

D 4 Berechnungsmöglichkeiten

Mithilfe wellenoptischer Programme ist es möglich eine allgemeine Strahlausbreitung zu berechnen. Dabei sind nur Einschränkungen durch die verfügbaren Ressourcen des Rechners und der benötigten Rechenzeit gegeben. Theoretisch lässt sich jeder Anwendungsfall in Programmiersprache umsetzen und ist damit berechenbar.

Die aktuelle Version ermöglicht hauptsächlich Berechnungen, welche der Rotationssymmetrie zugrunde liegen und durch eine Linienabstrahlung vollzogen werden.

Auf dieser Basis lässt sich die gesamte Strahlausbreitung durch ein optisches System mit beliebig vielen Elementen berechnen. Als Beispiel wird im Folgenden die Berechnung einer Kollimation mit anschließender erneuter Fokussierung dargelegt (siehe **Abb v**). Die verwendeten Parameter sind in **Tab vii** dargestellt.

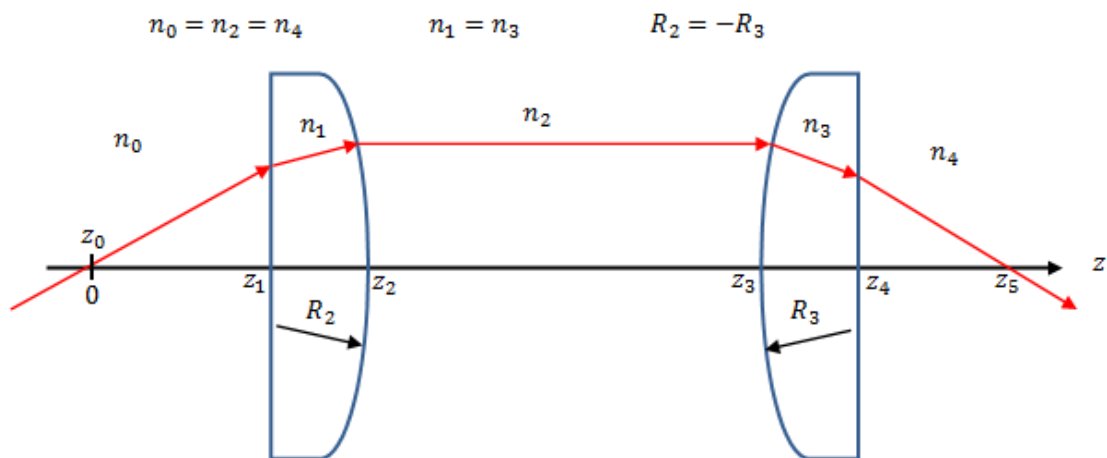


Abb v Schematische Darstellung des zu berechnenden optischen Systems

Laser-Parameter	Startfläche	1. Grenzfläche	2. Grenzfläche
$\lambda = 1 \mu m$ $P = 10 W$ Gaußstrahl $w_{86} = 5 \mu m$	Ebene $z_0 = 0$ Begrenzung: Kreis $R_{aperture} = 12,5 \mu m$ Elementgröße: $0,5\lambda$ $n_0 = 1$ Abstrahlung: Linie	Ebene $z_1 = 38 mm$ Begrenzung: Kreis $R_{aperture} = 4,85 mm$ Elementgröße: $0,5\lambda$ $n_1 = 1,5$ Abstrahlung: Linie	Sphäre: $R_2 = -20 mm$ $z_2 = 41 mm$ Begrenzung: Kreis $R_{aperture} = 5,1 mm$ Elementgröße: 1λ $n_2 = 1$ Abstrahlung: Linie
3. Grenzfläche	4. Grenzfläche	5. Grenzfläche	xz-Ebene
Sphäre: $R_3 = 20 mm$ $z_3 = 80 mm$ Begrenzung: Kreis $R_{aperture} = 5,1 mm$ Elementgröße: $0,5\lambda$ $n_2 = 1,5$ Abstrahlung: Linie	Ebene $z_4 = 83$ Begrenzung: Kreis $R_{aperture} = 4,81 \mu m$ Elementgröße: $0,5\lambda$ $n_0 = 1$ Abstrahlung: Linie	Ebene $z_1 = 122 mm$ Begrenzung: Kreis $R_{aperture} = 250 \mu m$ Elementgröße: $0,5\lambda$	Elemente in x- Richtung: 500 Elemente in z- Richtung: 4000

Tab vii Übersicht der verwendeten Parameter

Sind alle Parameter eingegeben, so kann der Benutzer sich die Eingaben in einer 3D-Vorschau betrachten:

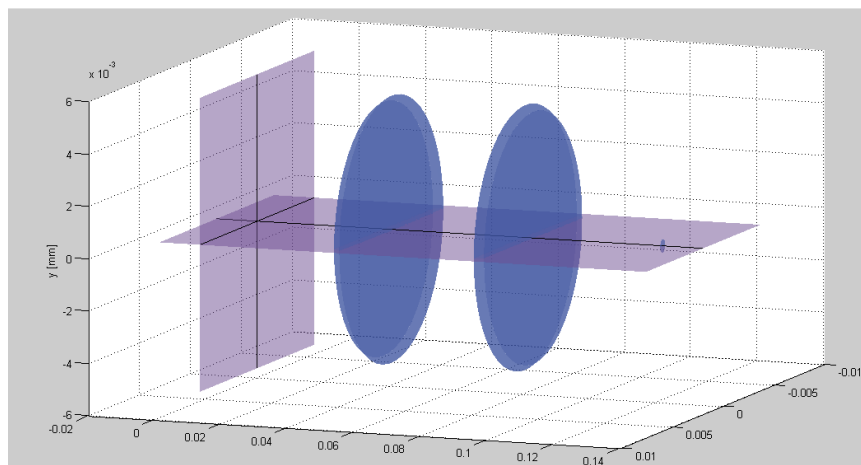


Abb vi Dreidimensionale Vorschau des optischen Systems

Weiterhin besteht die Möglichkeit den Strahlenverlauf strahlenoptisch abzuschätzen (siehe **D 3.3**) und ggf. Veränderungen an den Parametern vorzunehmen. Sind die Ergebnisse der strahlenoptischen Berechnung zufriedenstellend, kann die numerische Berechnung begonnen werden.

Zusätzlich zur Berechnung der elektrischen Feldstärken auf den Grenzflächen kann noch eine Berechnung der Strahlausbreitung in einer Ausbreitungsebene erfolgen. Diese Berechnung ist optional verfügbar.

Ist die Berechnung abgeschlossen, so kann der Benutzer sich die elektrische Feldstärke, Phasenlage und Intensität an jeder Fläche in 2D und 3D anzeigen lassen. Diese Darstellungen für die letzte Grenzfläche des berechneten optischen Systems sind in **Tab viii** dargestellt.

Wurde die zusätzliche Berechnung entlang der xz -Ebene oder yz -Ebene ausgewählt, so ist die Ansicht aus **Abb vii** verfügbar. In dieser Darstellung wurde die Feldstärke auf das Maximum normiert. Die Darstellung eines 3D-Strahlenverlauf ist ebenfalls durch die Abstrahlung in die xz - bzw. yz -Ebene möglich. Er wurde in **Abb viii** dargestellt.

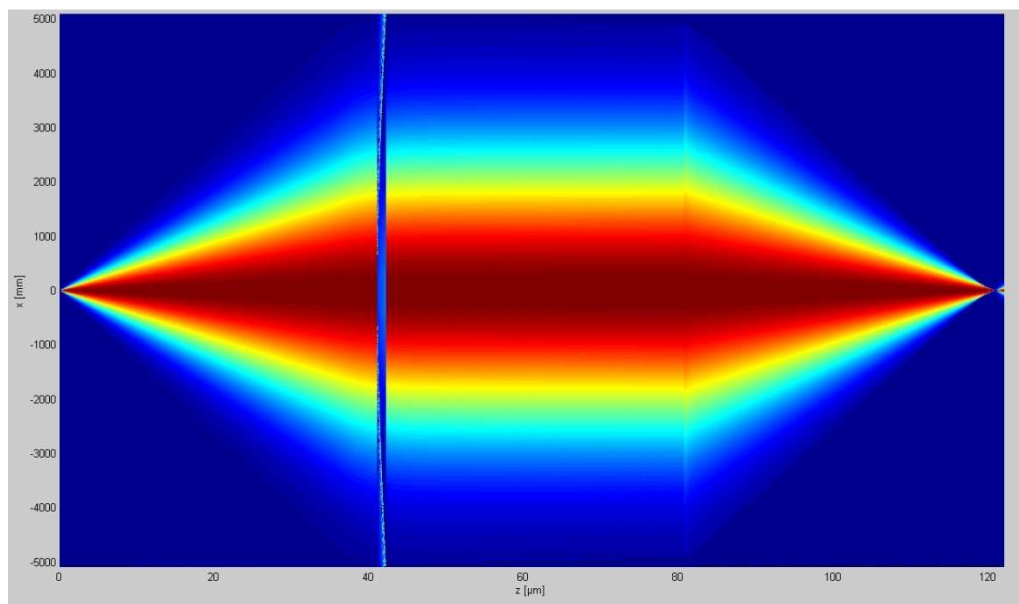
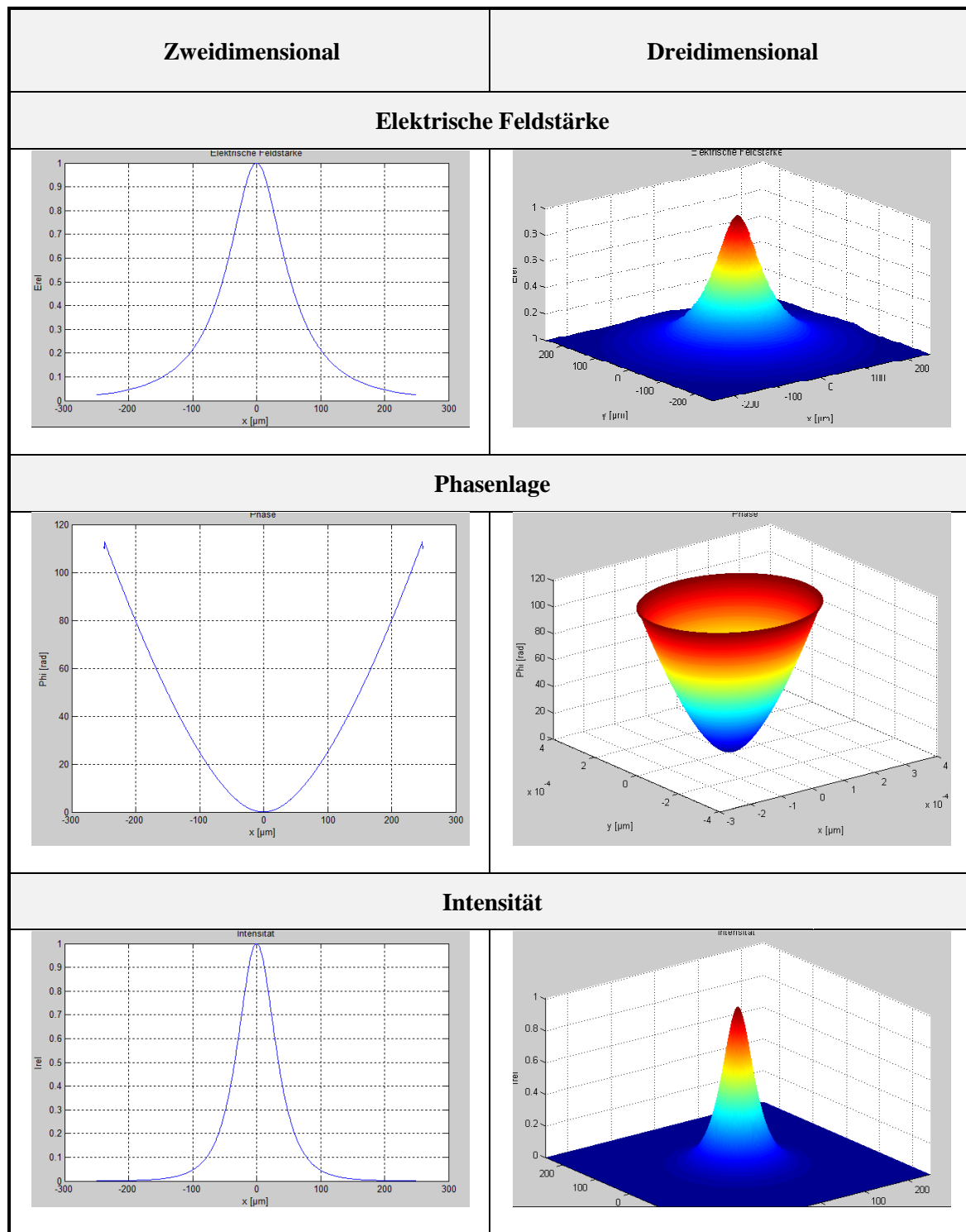


Abb vii Verlauf der elektrischen Feldstärke in der xz -Ebene

In **Abb vii** sind deutlich die Grenzfläche aufgrund der Streifen zu sehen. Die Ursache ist, dass es sich in diesen Bereichen um das Nahfeld der Abstrahlflächen handelt. Durch eine Erhöhung der Elementanzahl in der xz -Ebene würden diese Bereiche weitgehend verschwinden. Mit der gewählten Elementanzahl wurde aber schon die Obergrenze der darstellbaren Elemente des Rechners gewählt.



Tab viii Übersicht Anzeigemöglichkeiten im Auswertungsfenster

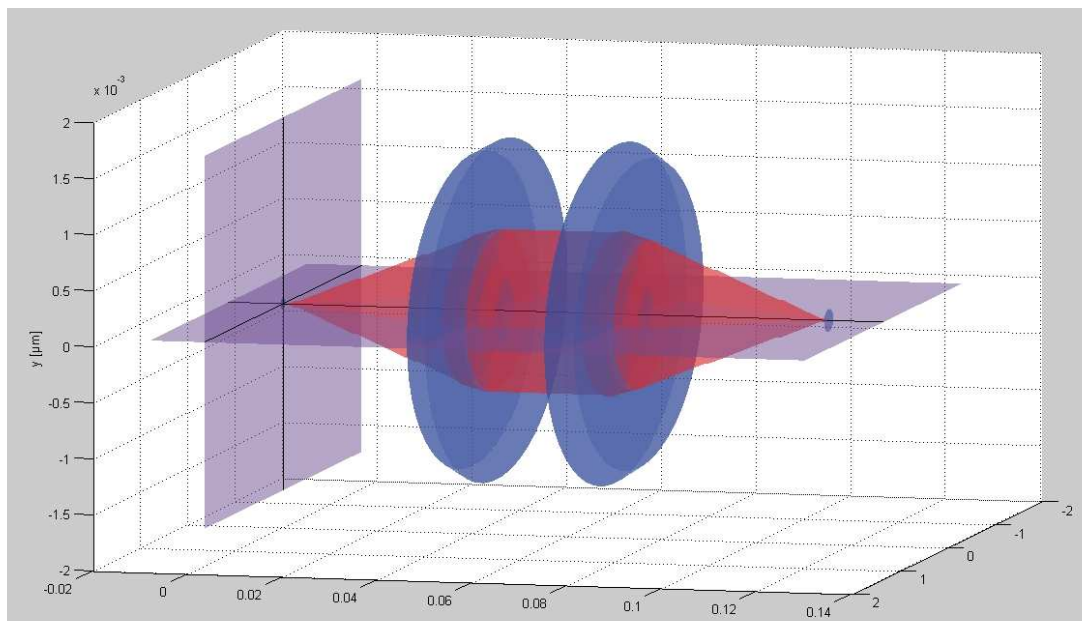


Abb viii 3D Strahlenverlauf des optischen Systems

Neben der Berechnung der störungsfreien Laserstrahlpropagation ist auch die Berechnung von Beugungseffekten durch Hindernisse möglich. Eine kleine Übersicht der Möglichkeiten ist im Weiteren zu finden.

Beugung an einer Kreisblende; Berechnungsvariante: Rotationsymmetrie

Laser-Parameter	Startfläche	1. Grenzfläche
$\lambda = 1 \mu m$ $P = 10 W$ Top-Hat (ideal) $w_{100} = 100 \mu m$	Ebene $z_0 = 0$ Begrenzung: Kreis $R_{aperture} = 50 \mu m$ Elementgröße: $0,5\lambda$ $n_0 = 1$ Abstrahlung: Fläche	Ebene $z_1 = 15 mm$ Begrenzung: Kreis $R_{aperture} = 500 \mu m$ Elementgröße: 2λ $n_1 = 1$

Tab ix Verwendete Parameter für Beugung an einer Kreisblende

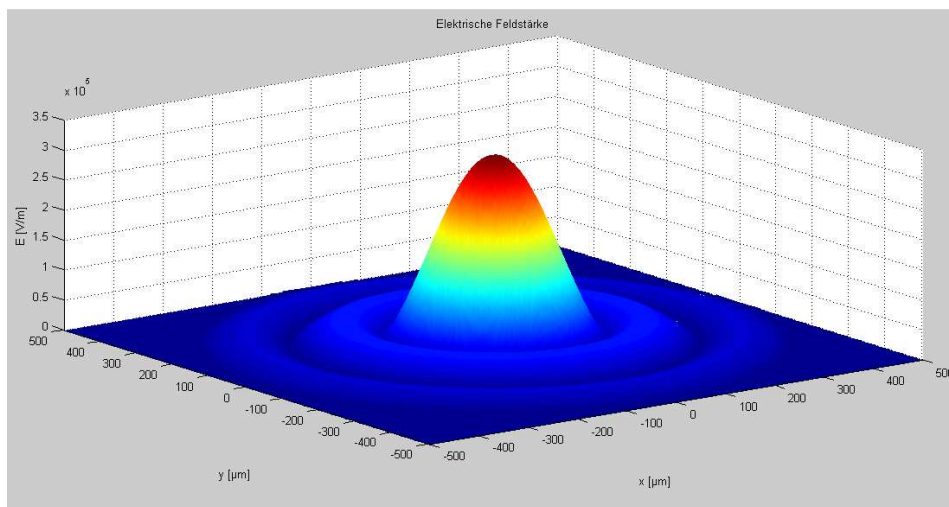


Abb ix 3D Darstellung der elektrischen Feldstärke auf der Zielfläche nach Beugung an einer Kreisblende

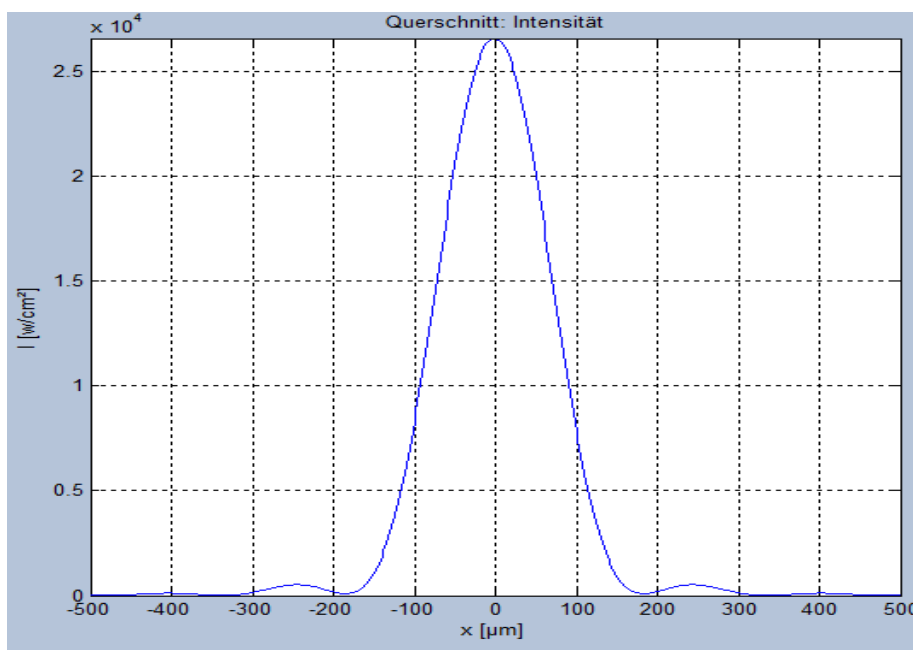


Abb x 2D Darstellung der Intensität auf der Zielfläche nach Beugung an einer Kreisblende

Beugung am Einzelspalt; Berechnungsvariante: Rotationssymmetrie

Laser-Parameter	Startfläche	1. Grenzfläche
$\lambda = 1 \mu m$ $P = 10 W$ Gaußstrahl $w_{100} = 50 \mu m$	Ebene $z_0 = 0$ Begrenzung: Kreis $R_{aperture} = 35 \mu m$ Elementgröße: $0,5\lambda$ $n_0 = 1$ Abstrahlung: Linie	Ebene $z_1 = 15 mm$ Begrenzung: Kreis $R_{aperture} = 1 mm$ Elementgröße: 2λ $n_1 = 1$

Tab x Verwendete Parameter für Beugung am Einzelspalt

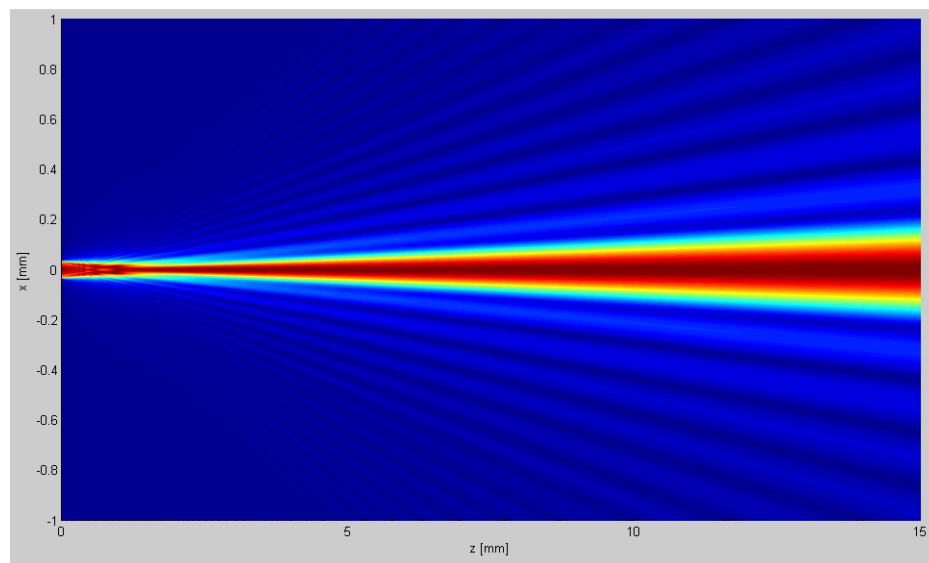


Abb xi normierte Darstellung des Verlaufes der elektrischen Feldstärke in der xz-Ebene nach Beugung am Einzelspalt

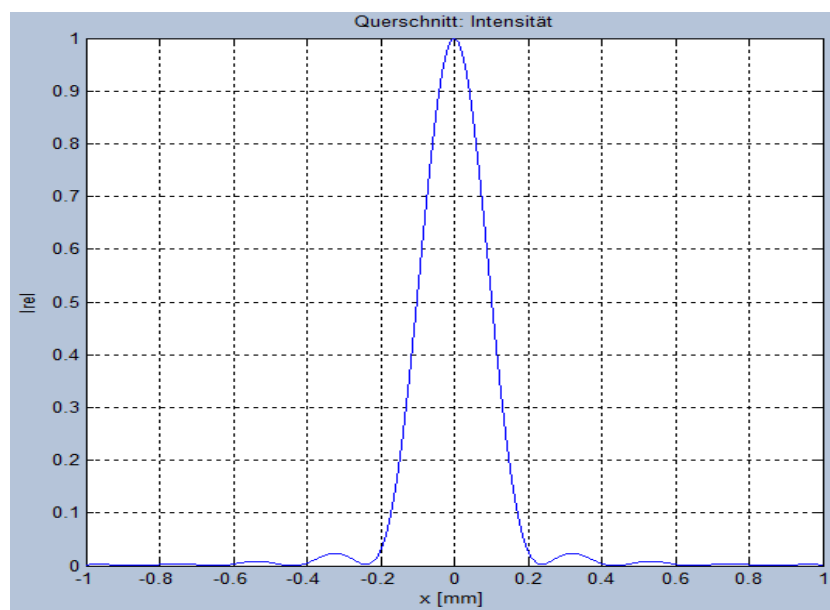


Abb xii 2D Darstellung der Intensität auf der Zielfläche nach Beugung am Einzelspalt

Beugung am Amplitudengitter Berechnungsvariante: keine Rotationssymmetrie

Laser-Parameter	Startfläche	1. Grenzfläche
$\lambda = 1 \mu m$ $P = 10 W$ Sphärischer Resonator $l = 3, p = 2$ $w_\sigma = 100 \mu m$	Ebene $z_0 = 0$ Begrenzung: Rechteck $a = b = 120 \mu m$ Elementgröße: $0,5\lambda$ $n_0 = 1$ $g_x = 5 \mu m, g_y = 0$ $T_x = 40\%, T_y = 100\%$	Ebene $z_1 = 3 mm$ Begrenzung: Rechteck $a = 2 mm,$ $b = 400 \mu m$ Elementgröße: 2λ $n_1 = 1$

Tab xi Verwendete Parameter für Beugung am Amplitudengitter

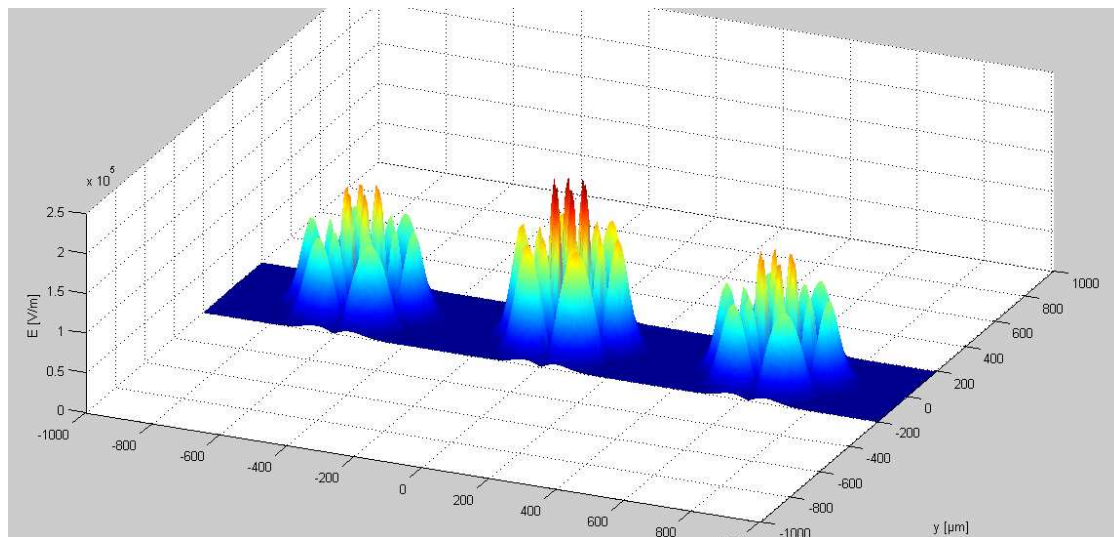


Abb xiii 3D Darstellung der elektrischen Feldstärke auf der Zielfläche nach Beugung am Amplitudengitter

Das erstaunliche an diesem Ergebnis ist, dass das gleiche Strahlprofil auch als Nebenmaxima auftaucht. Dieses Ergebnis konnte bisher mit keiner Literaturangabe bestätigt werden. Daher müssen experimentelle Überprüfungen stattfinden um den Sachverhalt zu bestätigen oder zu zeigen, dass diese Berechnung nicht mit der Realität übereinstimmt.

Neben den aufgeführten Berechnungsbeispielen gibt es noch zahlreiche weitere Möglichkeiten. Deren Ausführung würde jedoch den Rahmen dieser Dokumentation sprengen. Die Beispiele sollen nur als kleiner Hinweis der vielseitigen Berechnungsmöglichkeiten dienen. Desweiteren ist das Programm beliebig erweiterbar und den Berechnungsmöglichkeiten sind nur durch die Zeitvorgabe Grenzen gesetzt.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.

Diese Arbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Geringswalde, den 04.11.2010

Markus Olbrich